

## PRÜFUNGSAUFGABEN HT 1

### Aufgabe: Ladungen in elektrischen und magnetischen Feldern

#### Teilaufgabe 1

Im Jahre 1831 führte Michael Faraday folgendes Experiment an der Waterloo Bridge in London durch. Er ging dabei davon aus, dass sich im strömenden Wasser der darunter fließenden Themse genügend positiv und negativ geladene Ionen befinden, die durch das Erdmagnetfeld so abgelenkt werden, dass zwischen den Flussufern eine elektrische Spannung entstehen müsste. Diese Spannung wollte er mit einem Spannungsmessgerät messen, das er durch zwei Leiter mit den Flussufern verband.

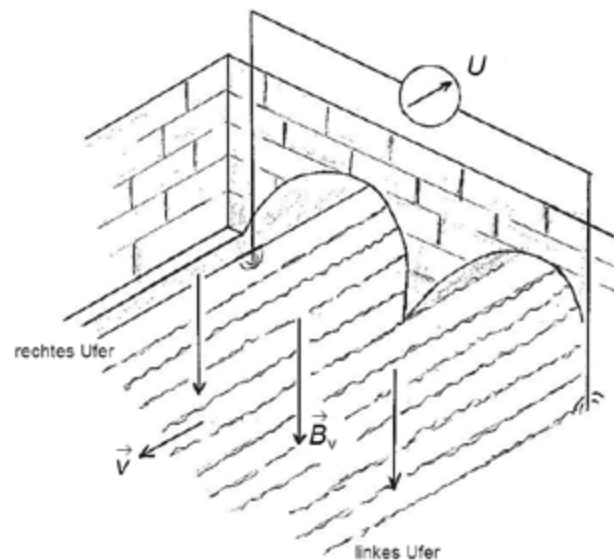


Abbildung 1: Faradays Experiment (nach: <http://www.phy6.org/earthmag/Ddynamos.htm>, verändert)

Die Größen in der Abbildung 1 sind:

$\vec{B}_v$ : Stärke und Richtung der Vertikalkomponente des Erdmagnetfeldes,

$\vec{v}$ : Strömungsgeschwindigkeit der Themse,

$U$ : die von Faraday erwartete Spannung.

- Erläutern Sie, warum eine Spannung zwischen den Flussufern entsteht, und geben Sie die Polung der Spannung an.
- Es sei im Folgenden  $d = 300 \text{ m}$  die Breite und  $v = 2,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  die als einheitlich angenommene Strömungsgeschwindigkeit der Themse.  $B_v = 44 \cdot 10^{-6} \text{ T}$  ist die Stärke der Vertikalkomponente des Erdmagnetfeldes.

- Leiten Sie die Gleichung  $U = d \cdot v \cdot B_v$  für die zu messende Spannung her und erläutern Sie den Ansatz.

- Berechnen Sie die Spannung.

**(12 Punkte)**

## Teilaufgabe 2

Faraday konnte für den in Teilaufgabe 1 beschriebenen Versuch keine Spannung nachweisen, da ihm zu seiner Zeit unter anderem noch kein hinreichend empfindliches Messgerät zur Verfügung stand.

Das Prinzip der Spannungsentstehung wurde jedoch später bei dem sogenannten magnetohydrodynamischen Generator (MHD-Generator) wieder aufgegriffen. Bei einem solchen Generator werden die sich in einem Abgasstrom eines Verbrennungsprozesses bewegendenden Ladungsträger genutzt, um eine elektrische Spannung zu erzeugen. Dazu brauchen die Ionen im Abgasstrom nur nach ihrer Ladung getrennt und auf zwei Elektroden gebracht zu werden. Zunächst soll in einem Vorversuch die Geschwindigkeitsverteilung der geladenen Teilchen in einer Abgasströmung bestimmt werden. Dazu wird der Abgasstrom durch eine Anordnung geschickt, bei der sich ein elektrisches Feld mit der Feldstärke  $E$  und ein magnetisches Feld mit der Feldstärke  $B$  so überlagern, dass nur Teilchen einer bestimmten Geschwindigkeit geradlinig hindurchfliegen können. (Dazu wird vereinfachend angenommen, dass sich die geladenen und ungeladenen Teilchen frei und voneinander unabhängig bewegen können.)

- a) ■ Beschreiben Sie einen Versuchsaufbau für einen solchen Geschwindigkeitsfilter (Wien-Filter), ggf. mit Hilfe einer Skizze.
- Leiten Sie eine Beziehung für die Geschwindigkeit  $v$  der Teilchen her, die den Filter geradlinig passieren können.

(Zur Kontrolle:  $v = \frac{E}{B}$ )

- b) Das magnetische Feld des Wien-Filters besitzt eine Stärke von  $B = 125 \text{ mT}$ . Zur Untersuchung des Abgasstroms wird die elektrische Feldstärke variiert und mit einem Zählrohr wird die Zählrate  $Z$  der Ladungsträger hinter dem Geschwindigkeitsfilter gemessen. Die Messergebnisse sind in der Tabelle dargestellt.

$E$ in $\frac{\text{V}}{\text{m}}$	5000	10000	15000	20000	25000	30000	35000
$Z$ in $\frac{1}{\text{s}}$	5	12	52	84	48	14	6
$v$ in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$							

Tabelle: Elektrische Feldstärke  $E$ , Zählrate  $Z$  und Geschwindigkeit  $v$

- Geben Sie für jeden Wert der Feldstärke in der Tabelle die zugehörige Geschwindigkeit  $v$  an.
  - Stellen Sie die Zählrate  $Z$  in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit  $v$  in einem Diagramm graphisch dar.
  - Beschreiben Sie das Diagramm.
- c) Der Abgasstrom soll nun in den MHD-Generator geleitet werden, in dem die Ladungsträger getrennt und auf zwei Elektroden gebracht werden. Der prinzipielle Sachverhalt ist in der Abbildung 2 dargestellt. Die elektrischen Anschlüsse des Generators in Form der Kondensatorplatten als Elektroden sind zunächst kurzgeschlossen, d. h. über ihre Anschlusskabel leitend miteinander verbunden.

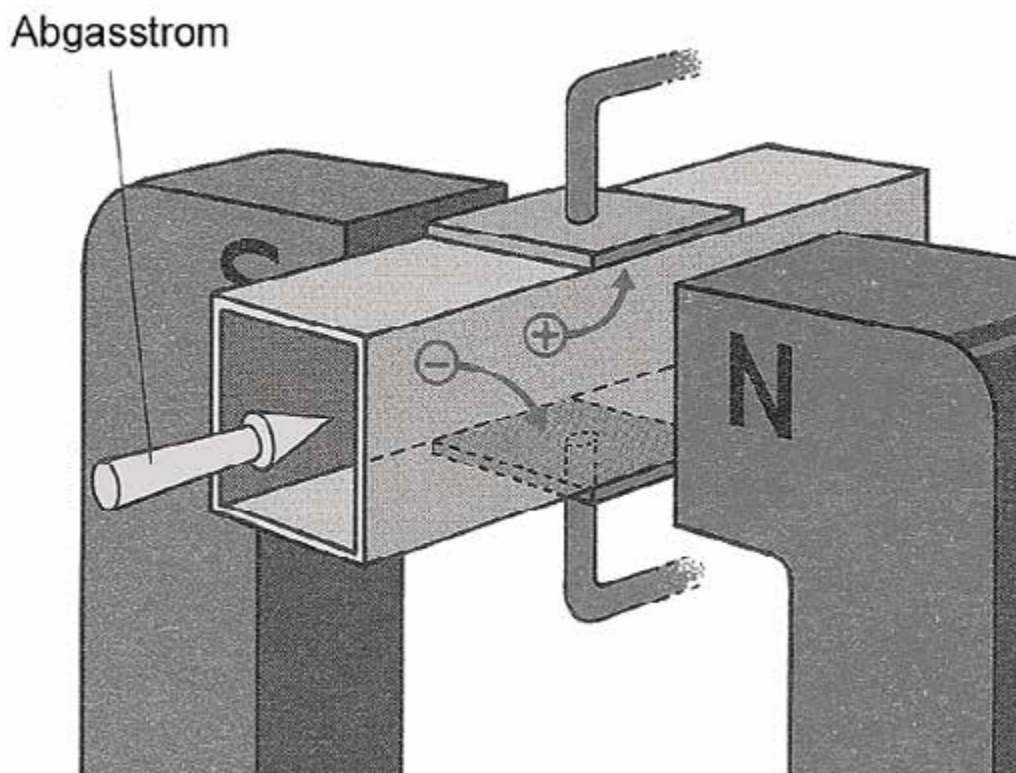


Abbildung 2: MHD-Generator

- Begründen Sie, warum die geladenen Teilchen in die in der Skizze dargestellten Richtungen abgelenkt werden.
- Erläutern Sie, warum sich die geladenen Teilchen in einem homogenen Magnetfeld auf einem Kreisbogen bewegen, wenn sie keine Bewegungskomponente in Magnetfeldrichtung haben.
- Leiten Sie eine Gleichung für den Radius  $r$  des Kreisbogens als Funktion der Teilchengeschwindigkeit  $v$  her.

[Kontrolllösung:  $r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}$ ]

Bei den geladenen Teilchen handelt es sich u. a. um einfach positiv geladene Ionen mit der Masse  $m = 1,99 \cdot 10^{-26}$  kg. Die Ionen bewegen sich mit  $v = 2,00 \cdot 10^4$  m/s im Magnetfeld mit der Stärke von  $B = 10$  mT.

Berechnen Sie den Radius  $r$  der Bahnkurve.

(25 Punkte)

### Teilaufgabe 3

Um alle Ionen, die sich auf einer Kreisbahn mit dem Radius  $r = 0,25$  m bewegen, aufzufangen, müssen die Kondensatorplatten des MHD-Generators mit dem Abstand  $d = 10,0$  cm eine gewisse Länge  $l$  besitzen. Die geometrischen Verhältnisse sind in der Abbildung 3 dargestellt. Die Magnetfeldlinien sollen senkrecht zur Abbildungsebene verlaufen. Die elektrischen Anschlüsse sind weiterhin leitend miteinander verbunden.

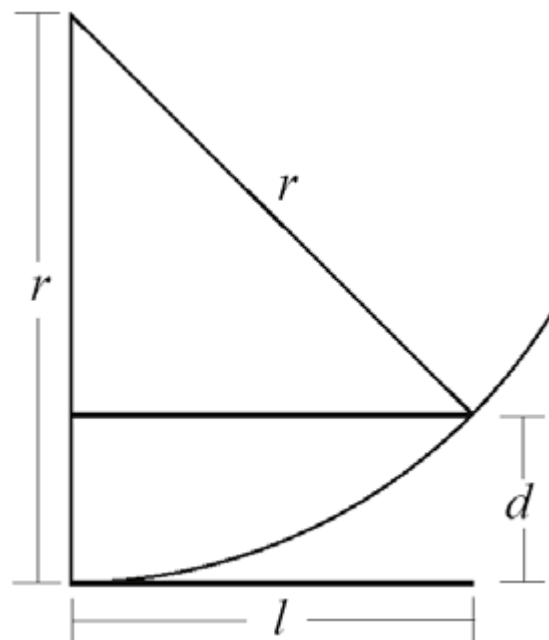


Abbildung 3: Geometrie des Kondensators

- a) ■ Zeigen Sie, dass der Kondensator mindestens  $l = 0,20 \text{ m}$  lang sein muss, damit die Ionen, die auf Höhe der unteren Kondensatorplatte in den Kondensator eintreten, noch gerade auf die obere Kondensatorplatte treffen.  
■ Erläutern Sie, warum die Kondensatorplatten leitend verbunden sein müssen.
- b) Die leitende Verbindung der Kondensatorplatten im MHD-Generator wird jetzt aufgehoben.  
■ Berechnen Sie die am Generator entstehende Spannung für die Werte aus Teilaufgabe 2c).  
■ Überprüfen Sie, ob die erzeugte Spannung größer wird, wenn die Ionen mehrfach ionisiert sind.
- c) Im elektrischen Feld zwischen den Kondensatorplatten ist elektrische Energie gespeichert. Geben Sie an, woher diese Energie stammt.

**(20 Punkte)**

## Teilaufgabe 4

Wenn man das Prinzip des MHD-Generators umkehrt, erhält man einen „Motor“. Es gibt bereits Forschungsprojekte, bei denen man versucht, Schiffe mit einem solchen Motor anzutreiben. In einem einfachen Grundversuch werden dafür an der Unterseite des Schiffes zwei Elektroden angebracht, an die eine Gleichspannung gelegt wird. Außerdem wird ein Magnetfeld erzeugt, dessen Feldlinien (weitgehend) senkrecht zu den elektrischen Feldlinien und senkrecht zur Wasseroberfläche verlaufen. Abbildung 4 zeigt die prinzipielle Anordnung für einen solchen Schiffsantrieb.

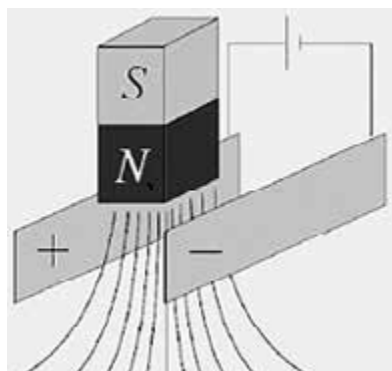


Abbildung 4: Umkehrung des MHD-Generators zu einem Motor  
(aus: Ulrich Eichmann, Phy Did B, Frühjahrstagung Münster 2011)

Man kann davon ausgehen, dass sich im Meerwasser frei bewegliche positiv und negativ geladene Ionen befinden.

Erläutern Sie die Funktionsweise des dargestellten Schiffsantriebs, insbesondere auch unter Berücksichtigung des Verhaltens der beiden Ionenarten.

**(8 Punkte)**

## LÖSUNGEN HT 1

### Teilaufgabe 1

Im Jahre 1831 führte Michael Faraday ...

**HINWEIS** In dieser Aufgabe geht es um die Wirkung von elektrischen und magnetischen Feldern bei bewegten Ladungsträgern. Sie müssen die grundlegenden Formeln parat haben und außerdem sich die in der Skizze dargestellte Situation gut räumlich vorstellen können. Es gibt übrigens einen bekannten Effekt, der sehr ähnlich wie Faradays Experiment aufgebaut ist (der ist hier nicht explizit gefragt, aber wenn Sie ihn kennen, dürfte diese Aufgabe wenig Schwierigkeiten machen).

### Lösungsschritte

1. Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).
2. Überlegen Sie sich zunächst, in welche Richtung die Vektoren der Ionengeschwindigkeit, des elektrischen und des magnetischen Felds hier zeigen.
3. Die Richtung der Lorentz-Kraft bestimmen Sie mit der Drei-Finger-Regel (welche Hand gilt für welche Ladungsorte?).
4. Die gesuchte Gleichung leiten Sie durch Gleichsetzen von Coulomb- und Lorentz-Kraft her.
5. Achten Sie beim Berechnen von Zahlenwerten auf korrekte Einheiten.

### Stichpunktlösung

a)

Die Ladungsträger, d. h. die im Flusswasser gelösten Ionen, bewegen sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  in Richtung des Flusses. Ihre Bewegungsrichtung steht senkrecht zum Magnetfeld  $\vec{B}$ , deswegen wirkt auf sie die Lorentz-Kraft  $\vec{F}_L$ , die sowohl senkrecht auf  $\vec{v}$  als auch auf der vertikalen Magnetfeldkomponente  $\vec{B}_v$  steht und somit parallel zur Brücke gerichtet ist. Dabei werden positive Ionen nach der Rechte-Hand-Regel zum linken Ufer und negative zum rechten Ufer beschleunigt. Dies bewirkt eine Ladungstrennung in Brückenrichtung und es baut sich eine elektrische Spannung  $U$  mit Pluspol am linken Ufer und Minuspol am rechten Ufer auf.

Anmerkung: Dies ist im Prinzip dieselbe Anordnung wie beim Hall-Effekt.

b)

Die „Querspannung“  $U_{\text{quer}}$  aus Teilaufgabe a) bewirkt ein elektrisches Feld  $E = \frac{U_{\text{quer}}}{d}$ , das (je nach Ladungsart) parallel oder antiparallel zur Brücke gerichtet ist. Daher wirkt auf Ionen mit der Ladung  $q$  eine Coulomb-Kraft  $F_C = \frac{U_{\text{quer}}}{q \cdot d}$ . Gleichzeitig spüren sie die entgegengesetzt wirkende Lorentz-Kraft  $\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$  mit dem Betrag  $F_L = q \cdot v \cdot B_v$ . Diese beiden Kräfte müssen betragsmäßig gleich groß sein (Kräftegleichgewicht):

$$q \frac{U_{\text{quer}}}{d} = q \cdot v \cdot B_v \Rightarrow U_{\text{quer}} = d \cdot v \cdot B_v$$

Einsetzen der Zahlenwerte:  $U = 300 \text{ m} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 44 \cdot 10^{-6} \text{ T} = 26,4 \text{ mV}$

## Teilaufgabe 2

Faraday konnte für den (...) Versuch ...

**HINWEIS** Bei dieser Anwendung der Ionenablenkung durch elektromagnetische Felder geht es ähnlich zu wie in einem Massenspektrometer. Zunächst wirken im Wien-Filter wieder elektrische und magnetische Kräfte, danach nur noch die magnetischen.

## Lösungsschritte

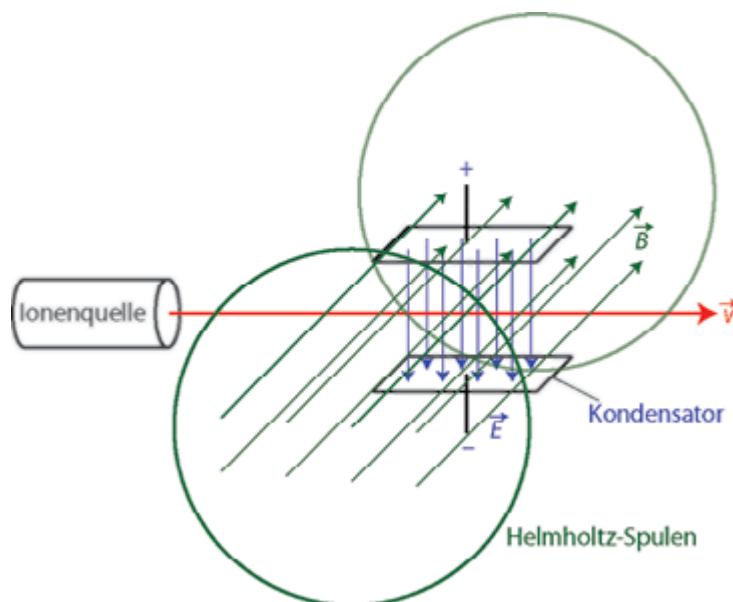
- |    |  |
|----|--|
| 1. | Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).   |
| 2. | Beim Versuchsaufbau müssen Sie zum einen die räumliche Lage von elektrischem und Magnetfeld relativ zum Ionenstrahl beschreiben und zum anderen angeben, wie die Felder erzeugt werden können.                           |
| 3. | Bei der Diskussion des Diagramms müssen Sie nicht unbedingt angeben, was für eine mathematische Kurve den Daten zugrunde liegen könnte (aber es schadet sicherlich auch nicht).  |
| 4. | Die letzte Teilaufgabe entspricht der bereits beschriebenen Situation, nur dass jetzt das elektrische Feld fehlt. Überlegen Sie sich, was eine konstante, immer senkrecht zur Bewegungsrichtung wirkende Kraft bedeutet. |
| 5. | Achten Sie beim Berechnen von Zahlenwerten auf korrekte Einheiten.   |

### Stichpunktlösung

a)

Der Versuchsaufbau: Elektrisches und Magnetfeld sowie die Bewegungsrichtung der Ionen stehen paarweise senkrecht aufeinander. Das homogene elektrische Feld liefert z. B. ein Plattenkondensator, das Magnetfeld ein Paar Helmholtz-Spulen.

*Anmerkung: Wien-Filter werden beispielsweise auch im Massenspektrometer benutzt.*



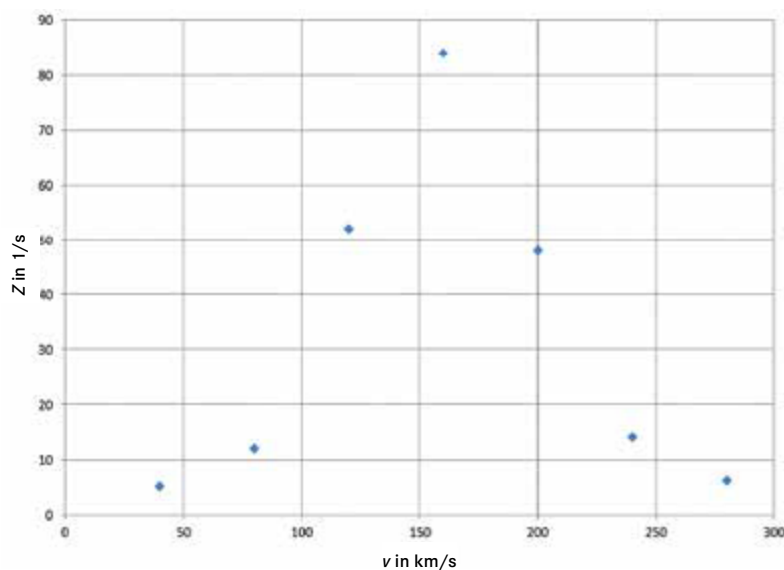
In dieser Anordnung wirkt die Lorentz-Kraft antiparallel zur Coulomb-Kraft (wie in Teilaufgabe 1), der Strahl passiert die Anordnung genau dann ohne Ablenkung, wenn beide Kräfte betragsmäßig gleich sind:

$$F_c = F_L \Leftrightarrow qE = qvB \Leftrightarrow v = \frac{E}{B}$$



b)

$E$ in $\frac{V}{m}$	5000	10000	15000	20000	25000	30000	35000
$Z$ in $\frac{1}{s}$	5	12	52	84	48	14	6
$v$ in $\frac{km}{s}$	40	80	120	160	200	240	280



Das Diagramm zeigt eine gaußähnliche Geschwindigkeitsverteilung (also ähnlich einer gaußschen Glockenkurve bzw. Normalverteilung) mit einem Maximum bei ca. 160 km/s und einer Halbwertsbreite von vielleicht 80 km/s.

c)

- Auch hier werden die Ionen durch die Lorentz-Kraft abgelenkt. Für positive Ionen ergibt die Rechte-Hand-Regel eine Ablenkung nach oben, für negative die Linke-Hand-Regel eine Ablenkung nach unten.
- In dieser Anordnung wirkt nur die Lorentz-Kraft (keine elektrischen Coulomb-Kräfte). Diese steht nach Voraussetzung in jedem Punkt der Bahn senkrecht auf der Bewegungsrichtung. Außerdem ist das Magnetfeld homogen; deswegen ist die Lorentz-Kraft auch überall gleich groß und entspricht daher der Zentripetalkraft  $F_{zp}$  einer Kreisbewegung.
- Es gilt daher:

$$F_{zp} = F_L \Leftrightarrow \frac{mv^2}{r} = qvB \Leftrightarrow r = \frac{mv}{qB}$$

- Einsetzen der Zahlenwerte:

$$r = \frac{1,99 \cdot 10^{-26} \text{ kg} \cdot 2 \cdot 10^4 \text{ m/s}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 10^{-2} \text{ T}} \approx 25 \text{ cm}$$

### Teilaufgabe 3

Um alle Ionen (...) aufzufangen ...

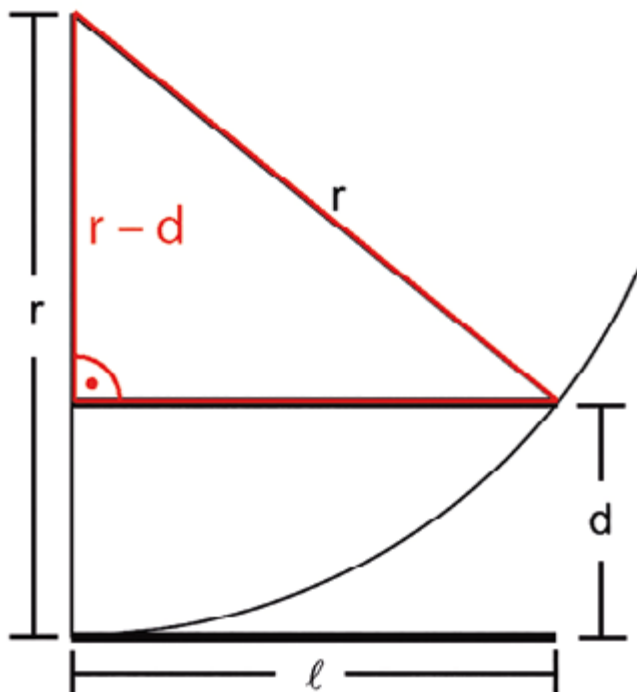
**HINWEIS** Diese Aufgabe ist zunächst eher geometrisch als physikalisch zu lösen. Die Frage nach den kurzgeschlossenen Kondensatorplatten ist dagegen wieder „echte“ Physik.

### Lösungsschritte

1. Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).
2. Formulieren Sie eine mathematische Bedingung dafür, dass die Kreisbahn gerade das Ende der zweiten Kondensatorplatte berührt.
3. Zur Frage nach den verbundenen oder nicht verbundenen Kondensatorplatten müssen Sie sich noch einmal die Rolle der beteiligten elektrischen und magnetischen Felder klarmachen.
4. Achten Sie beim Berechnen von Zahlenwerten auf korrekte Einheiten.

### Stichpunktlösung

a)



Mit dem Satz des Pythagoras bekommt man für  $r$ ,  $d$  und  $\ell$  die folgende Beziehung:

$$(r-d)^2 + \ell^2 = r^2 \Leftrightarrow \ell = \sqrt{r^2 - (r-d)^2} = \sqrt{2rd - d^2}$$

Einsetzen der Zahlenwerte liefert  $\ell = 20 \text{ cm}$ .

Wenn die Kondensatorplatten nicht leitend verbunden sind, würde sich wie in den ersten Teilaufgaben ein elektrisches Feld im Kondensator aufbauen und man hätte wieder ein Wien-Filter statt einer Kreisbahn.

**b)**

- Wir können die bereits bekannte Formel aus 1.b) verwenden.  
Einsetzen der Zahlenwerte ergibt:  $U = d \cdot v \cdot B = 0,1 \text{ m} \cdot 2 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10^{-2} \text{ T} = 20 \text{ V}$
- Die berechnete Spannung hängt nicht von der Ladung  $q$  ab, sondern nur von Plattenabstand, Geschwindigkeit und Magnetfeld. Darum ist es egal, ob die Ionen ein- oder mehrfach ionisiert sind (solange sie überhaupt eine Ladung tragen).

**c)**

Die Energie, die in dem im Kondensator sich aufbauenden elektrischen Feld steckt, stammt aus der Bewegungsenergie der hineinfliegenden und dann abgelenkten Elektronen.

## Teilaufgabe 4

Wenn man das Prinzip des MHD-Generators umkehrt ...

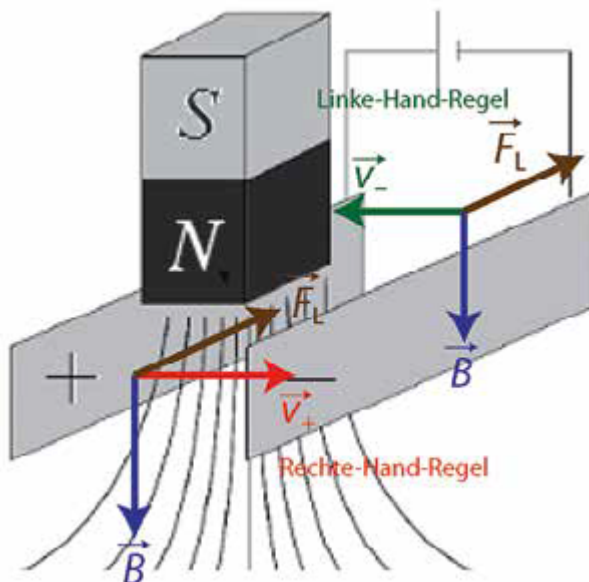
**HINWEIS** Die Transferleistung in dieser Aufgabe besteht darin, die Beziehung zwischen klassischem Elektromotor und Generator auf das MHD-Konzept zu übertragen. Sie müssen also die Funktionsweise des MHD-Generators gedanklich umkehren, damit aus zugeführter elektromagnetischer Energie Bewegungsenergie wird.

## Lösungsschritte

- |    |   |
|----|---|
| 1. | Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).                              |
| 2. | Skizzieren Sie die auf die Ionen unter dem Schiff wirkenden Kräfte.                                       |
| 3. | Diskutieren Sie, wie in der Aufgabenstellung angegeben, jeweils für positive und negative Ionen getrennt. |
| 4. | Zum Schluss brauchen Sie nur das dritte newtonsche Axiom.   |

### Stichpunktlösung

Die im Meerwasser unter dem Schiff gelösten Ionen erfahren im elektrischen Feld eine Kraft, welche die positiven Ionen nach rechts (zum „-“) und die negativen nach links (zum „+“) beschleunigt. Dadurch wirkt im vereinfacht als konstant nach unten gerichtet angenommenen Magnetfeld eine Lorentz-Kraft auf die Ionen. Mit der Rechte-Hand-Regel für die positiven und der Linke-Hand-Regel für die negativen Ionen erkennt man, dass sie jeweils nach „hinten“, also in die Bildebene hinein wirkt. Es werden also alle Ionen in dieselbe Richtung beschleunigt. Als Reaktionskraft erfährt das Schiff eine nach vorne gerichtete Kraft bzw. Beschleunigung, was ja der Sinn eines Schiffsantriebs ist (genauso gut könnte man Steine nach hinten werfen, um das Schiff nach vorne zu beschleunigen, das wäre dann aber nicht elektromagnetisch).



## PRÜFUNGSAUFGABEN HT 2

### Aufgabe: Das bohrsche Atommodell und seine experimentelle Bestätigung

#### Teilaufgabe 1

- a) Im Jahre 1909 führte E. Rutherford seinen bekannten Streuversuch durch, bei dem die Wechselwirkung von  $\alpha$ -Teilchen mit Goldatomen untersucht wurde. Dabei zeigte sich, dass die meisten  $\alpha$ -Teilchen die mindestens 1000 Atomlagen dicke Goldfolie ungehindert passieren konnten, einige aber deutlich abgelenkt oder sogar zurückgestreut wurden:

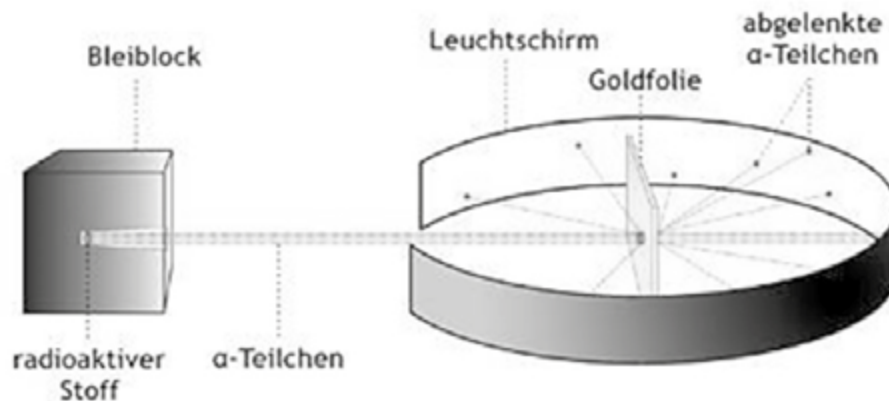


Abbildung 1: Prinzip des Streuversuchs  
(Quelle: [http://bertlnetz.de/chemie/bilder/rustr\\_kl.png](http://bertlnetz.de/chemie/bilder/rustr_kl.png))

*Erläutern Sie, warum Rutherford hier auf die Existenz eines im Vergleich zum Atomdurchmesser sehr kleinen, aber massereichen Atomkerns schließen konnte.*

- b) Rutherford formuliert daraufhin ein Kern-Hülle-Modell, das bald darauf (ab 1911) als Planetenmodell (Abbildung 2) beschrieben wurde:

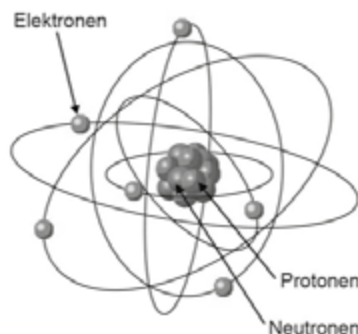


Abbildung 2: Planetenmodell  
(Quelle: [http://real-physik.info/fileadmin/user\\_upload/media/media\\_9/atommodell.png](http://real-physik.info/fileadmin/user_upload/media/media_9/atommodell.png))

*Begründen Sie, warum Rutherford zunächst von einer Kreisbewegung der Elektronen ausging. (Die ebenfalls möglichen Ellipsenbahnen wurden erst einige Jahre später in Betracht gezogen.)*

- c) *Geben Sie ein Beispiel für einen Widerspruch zu anderen damals bereits vorhandenen Erkenntnissen der Physik an.*
- d) *Im rutherfordschen Atommodell bewegt sich jedes Elektron mit einer bestimmten Geschwindigkeit  $v$  auf einer Kreisbahn mit dem Radius  $r$ .*
- *Leiten Sie anhand eines geeigneten Kraftansatzes die Beziehung  $r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{m_e \cdot v^2}$  für das Planetenmodell des Wasserstoffatoms her.*
  - *Erläutern Sie Ihren Ansatz.*

*(In der Formel bezeichnen  $e$  die Elementarladung,  $m_e$  die Elektronenmasse und  $\epsilon_0$  die elektrische Feldkonstante.)*

- e) *Der Bahnradius des Elektrons im Wasserstoffatom wird mit  $r = 5,29 \cdot 10^{-11}$  m angegeben. Berechnen Sie (ohne Einheitenumformung) die zugehörige Bahngeschwindigkeit  $v$ .*
- f) *Wenn sich ein  $\alpha$ -Teilchen ( ${}^4_2\text{He}$ ) einem Goldkern ( ${}^{197}_{79}\text{Au}$ ) nähert, gewinnt es potenzielle Energie auf Kosten seiner anfänglichen kinetischen Energie; diese potenzielle Energie berechnet sich nach:  $E_{\text{pot}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Z_{\text{He}} \cdot Z_{\text{Au}} \cdot e^2}{r}$ . ( $r$  ist hier der Abstand der Kernmittelpunkte.)*
- Der Radius  $r_k$  eines Atomkerns kann näherungsweise mit  $r_k = 1,3 \cdot 10^{-15} \text{ m} \cdot \sqrt[3]{A}$  angegeben werden. ( $A$  ist die jeweilige Massenzahl des Kerns.)*
- Überprüfen Sie, ob ein direkt auf einen Goldkern zulaufendes  $\alpha$ -Teilchen mit der Energie  $E_\alpha = 5,30 \text{ MeV}$  den Kern tatsächlich berührt. (Die Goldatome in der Folie sind in einer Gitterstruktur fest gebunden.)*

*Hinweis: Den Kernradius des  $\alpha$ -Teilchens brauchen Sie nicht zu berücksichtigen.*

**(23 Punkte)**

## Teilaufgabe 2

- a) Das rutherford'sche Atommodell wurde von Nils Bohr durch seine 1913 formulierten Postulate weiterentwickelt, vgl. dazu Abbildung 3.



Abbildung 3: Bohr'sches Atommodell  
(Quelle: [http://www.uni-ulm.de/fileadmin/website\\_uni\\_ulm/nawi.inst.251/Didactics/quantenchemie/grafik/11Bohr/Verbot.jpg](http://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/nawi.inst.251/Didactics/quantenchemie/grafik/11Bohr/Verbot.jpg))

Geben Sie die beiden bohrschen Postulate an.

- b) Die mathematische Formulierung für die Bahnradien  $r_n$  ist nach dem 1. bohrschen Postulat durch die Beziehung  $2\pi \cdot r_n = n \cdot \frac{h}{m_e \cdot v}$  gegeben.

- Leiten Sie die Formel  $r_n = \frac{h^2 \cdot \epsilon_0}{\pi \cdot m_e \cdot e^2} \cdot n^2$  für die Bahnradien im Wasserstoffatom her.
- Bestimmen Sie  $r_1$  für den Grundzustand des Wasserstoffatoms.

(11 Punkte)

### Teilaufgabe 3

Ein erster Hinweis auf unterschiedliche Energiezustände in der Hülle der Atome ergab sich 1912 durch ein Experiment von Gehrke und Seeliger (Abbildung 4).

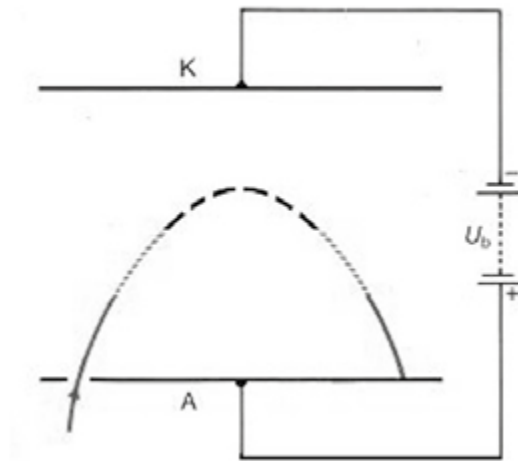


Abbildung 4: Der Versuch von Gehrke-Seeliger  
(Quelle: Gross Berhag: Atome, Kerne, Quanten, Klett-Verlag, 1. Auflage 1987, S. 25)

In einer mit Argongas gefüllten Röhre tritt ein Elektronenstrahl schräg in ein elektrisches Gegenfeld ein und bewegt sich auf einer Parabelbahn. Unter den gewählten Versuchsbedingungen zeigte sich, dass der Scheitelbereich der Parabelbahn dunkel blieb, während im Mittelteil der Bahn eine rote und im unteren Teil eine blaue Leuchterscheinung auftrat.

*Erklären Sie die Entstehung der unterschiedlichen Leuchterscheinungen im Argongas.*

**(6 Punkte)**



## Teilaufgabe 4

Ein klassisches Experiment zur Bestätigung des bohrschen Atommodells ist der 1914 veröffentlichte Franck-Hertz-Versuch. Die folgende Abbildung 5 zeigt das Prinzip des Versuchs, die verwendete Röhre ist mit Neon gefüllt.

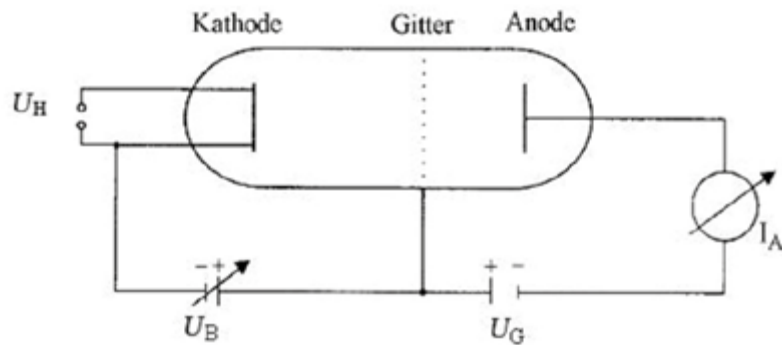


Abbildung 5: Franck-Hertz-Versuch

- Erläutern Sie die Schaltskizze hinsichtlich der Funktion der Bauelemente und der Bedeutung der Größen  $U_B$ ,  $U_G$  und  $I_A$ .
- Abbildung 6 zeigt ein bei diesem Experiment aufgenommenes Oszilloskopbild (Skalierung: x-Achse:  $U_B$  mit 10 V/cm, y-Achse:  $I_A$  mit 10  $\mu\text{A}/\text{cm}$ ).

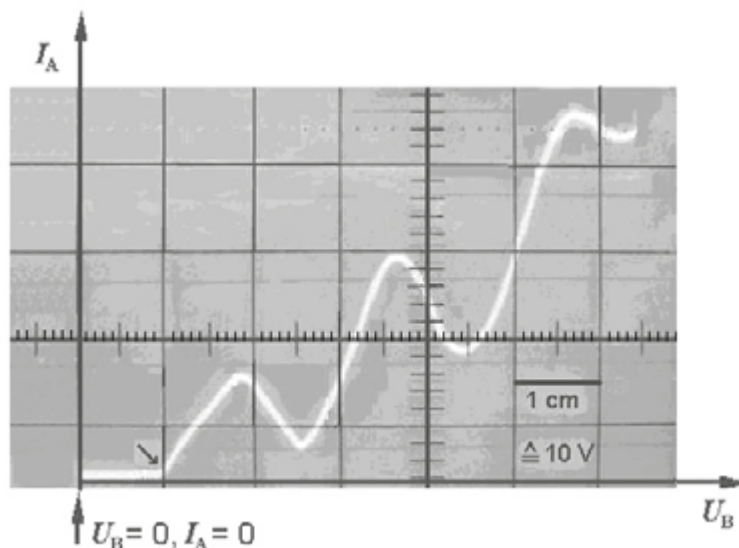


Abbildung 6: Oszilloskopbild zum Franck-Hertz-Versuch

- Ermitteln Sie anhand der eingezeichneten Koordinatenachsen die Werte der Beschleunigungsspannung  $U_B$ , bei denen Stromstärkemaxima des Anodenstroms  $I_A$  im Oszilloskopbild auftreten.

- Begründen Sie, warum der Strom  $I_A$  erst ab der im Bild mit einem Pfeil ( $\triangleright$ ) gekennzeichneten Stelle anzusteigen beginnt.

Abbildung 8 zeigt ein stark vereinfachtes Energiestufendiagramm des Neonatoms.

- Erklären Sie das erstmalige Absinken des Stroms  $I_A$  mit Hilfe des bohrschen Atommodells.
  - Erläutern Sie, warum dies im weiteren Verlauf der Kurve noch zweimal auftritt.
- c) Im Verlauf des Versuchs, wie er in Abbildung 6 dargestellt ist, können in der Franck-Hertz-Röhre bis zu drei deutlich voneinander abgegrenzte rot leuchtende Zonen beobachtet werden, die man auch im Schwarzweißbild von Abbildung 7 erkennen kann.

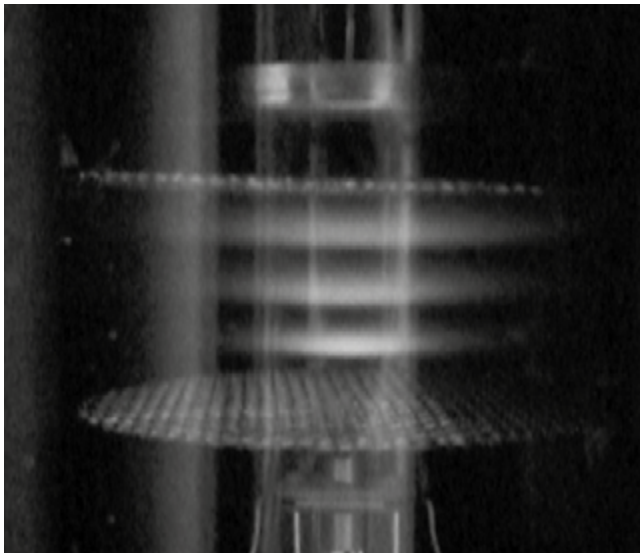


Abbildung 7: Leuchterscheinungen im Neon-Gas  
(Quelle: Infoczo - Eigenes Werk, CC-BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=35281918>)

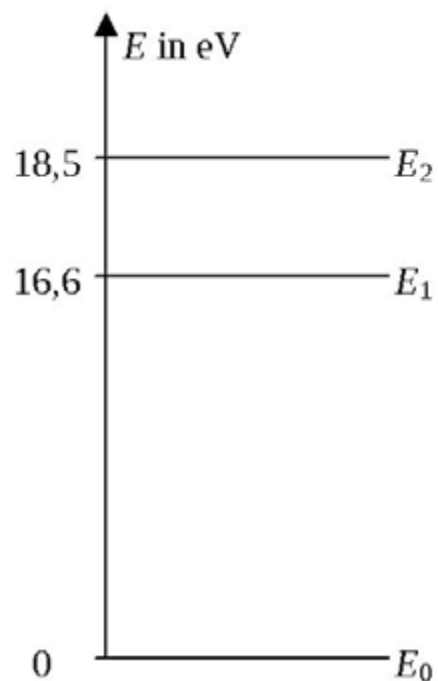


Abbildung 8: Energiestufendiagramm

Nach dem bohrschen Atommodell sind alle drei Übergänge zwischen den in diesem Energiestufendiagramm dargestellten Energiestufen möglich, allerdings mit sehr unterschiedlichen Übergangswahrscheinlichkeiten.

Ermitteln Sie, welcher der drei möglichen Übergänge im vereinfachten Niveauschema von Abbildung 8 zur Lichtemission im Sichtbaren ( $\lambda = 400$  bis  $800$  nm) führt.

(25 Punkte)

## LÖSUNGEN HT 2

### Teilaufgabe 1

Im Jahre 1909 führte E. Rutherford ...

**HINWEIS** Die Aufgabe fragt Ihr Verständnis des rutherfordischen Streuversuchs sowie der Konsequenzen für die Entwicklung des modernen Atommodells ab.

### Lösungsschritte

1. Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).
2. Schildern Sie die Konsequenzen aus den angegebenen Beobachtungen. Wenn Sie weitere Aspekte anführen wollen, machen Sie deutlich, dass dies nicht (direkt) aus Rutherfords Versuch folgt.
3. Diskutieren Sie anschließend, unter welcher Bedingung zwei sich gegenseitig anziehende Ladungen eine stabile Konfiguration einnehmen könnten – und warum schon die klassische Elektrodynamik dies verbietet.

### Stichpunktlösung

a)

Dass die meisten  $\alpha$ -Teilchen ohne Ablenkung durch die Folie fliegen, lässt darauf schließen, dass die Masse der in der Folie dicht an dicht liegenden Goldatome im Wesentlichen in sehr kleinen „Kernen“ konzentriert ist. Der Rest der Atome muss dagegen weitgehend „leer“ sein oder aus einem sehr dünnen Medium bestehen, das den schnellen Teilchen keinen Widerstand bietet. (Dies sind die Elektronenwolken der Atomhüllen, deren Masse viel kleiner ist als die von  $\alpha$ -Teilchen = Helium-4-Kernen; dies war Rutherford noch nicht bekannt und muss hier auch nicht als Lösung angegeben werden.)

Außerdem kann man noch folgern, dass der Atomkern positiv geladen ist und daher die ebenfalls positiven  $\alpha$ -Teilchen abstößt. Das Auftreten von Rückstreuungen deutet darauf hin, dass die Masse der Goldatomkerne deutlich größer ist als die der  $\alpha$ -Teilchen.

*Anmerkung: Dass es im Kern, wie in der Skizze angedeutet, auch Neutronen gibt, wurde 1920 von Rutherford postuliert und 1932 experimentell nachgewiesen.*

b)

Negative Elektronen und positive Atomkerne ziehen sich elektrisch (stark) an; deswegen können sich nicht beide in Ruhe befinden. Wenn dagegen die Elektronen auf Kreisbahnen um den Kern laufen, wirkt die konstante und immer auf den Kern hin gerichtete elektrische Anziehung als Zentripetalkraft und das Atom ist – mechanisch gesehen – stabil.

c)

Eine Kreisbewegung ist eine beschleunigte Bewegung. Beschleunigte elektrische Ladungen strahlen aber elektromagnetische Wellen ab, wie man seit Maxwell weiß. Daher müsste ein auf einer klassischen Kreisbahn um den Kern laufendes Elektron beständig Energie verlieren und innerhalb kurzer Zeit in den Kern stürzen. Das Atom wäre demnach nicht stabil.

Außerdem erklärt das Modell nicht die Linienspektren in Absorption und Emission: Die Kreisbahn könnte bei Rutherford beliebige Radien haben und das Elektron entsprechend beliebige Energiewerte annehmen. Die diskreten Energien der Linienspektren erfordern dagegen eine „Quantelung“ der Energiewerte.

d)

Im Planetenmodell des Wasserstoffatoms kreist ein Elektron um ein Proton. Wie in b) erläutert, entsteht die stabile Kreisbewegung, weil die Coulomb-Kraft als Zentripetalkraft wirkt.

Gleichsetzen der beiden Kräfte liefert:

$$F_C = F_{Zp} \Leftrightarrow \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} = \frac{m_e v^2}{r} \Leftrightarrow r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot m_e v^2}$$

e)

Wir lösen die Formel aus d) nach  $v$  auf:

$$\begin{aligned} v &= e \cdot \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 \cdot m_e r}} \\ &= 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 3,1416 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}}{\text{Vm}} \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m}}} \approx 2,188 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

*Anmerkung: Dies sind fast 1 % der Lichtgeschwindigkeit.*

f)

Die Frage ist hier, ob die angegebene kinetische Energie des  $\alpha$ -Teilchens groß genug ist, um die angegebene potenzielle elektrische Energie aufzubringen, die es an der Oberfläche des Goldkerns hätte. Diese Energie beträgt

$$E_{\text{pot}}(r_{\text{Au}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot 79 \cdot e^2}{1,3 \cdot 10^{-15} \text{ m} \cdot \sqrt[3]{197}} \approx 4,82 \cdot 10^{-12} \text{ J} \approx 30,1 \text{ MeV}$$

Dies ist etwa fünfeinhalb Mal mehr, als das einlaufende  $\alpha$ -Teilchen an kinetischer Energie mitbringt, es erreicht den Goldkern also nicht.

(Man kann auch den Abstand vom Goldkernmittelpunkt berechnen, an dem das Teilchen bei der Annäherung seine Bewegungsenergie aufgebraucht hat und umkehrt; dies sind etwa 42,9 fm.)

## Teilaufgabe 2

**HINWEIS** Hier werden die bohrschen Postulate abgefragt. Ihr Verständnis zeigen Sie, indem Sie in b) die Verbindung zum Ergebnis aus Teilaufgabe 1 sehen.

### Lösungsschritte

1. Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).
2. Formulieren Sie die bohrschen Postulate präzise und verständlich.
3. Machen Sie sich die Unterschiede und Gemeinsamkeiten der Modelle von Bohr und Rutherford klar, um die in b) angegebene Formel herzuleiten.
4. Achten Sie beim Berechnen von Zahlenwerten auf korrekte Einheiten.

### Stichpunktlösung

a)

1. *Bohrsches Postulat*: Elektronen können den Atomkern nur auf ganz bestimmten Bahnen mit diskreten Energiewerten umlaufen. Es gibt einen Grundzustand mit Radius größer als 0, in welchem die Elektronen unbegrenzte Zeit verharren können.

2. *Bohrsches Postulat*: Wenn ein Elektron von einer Bahn auf eine andere wechselt, gibt es die Energiedifferenz als elektromagnetisches Strahlungsquant gleicher Energie ab (Wechsel auf eine Bahn mit niedrigerer Energie) oder muss die Energiedifferenz durch Absorption eines geeigneten elektromagnetischen Strahlungsquants aufnehmen (Wechsel auf eine Bahn mit höherer Energie bzw. Ionisation).

b)

Abgesehen von der Quantisierung der Elektronenbahnen entspricht der bohrsche Ansatz dem von Rutherford, also gilt auch hier die Gleichung aus 1.d):

$$F_c = F_{zp} \Leftrightarrow r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot m_e v^2}$$

Um zur gesuchten Formel zu kommen, muss man nur die Elektronengeschwindigkeit  $v$  eliminieren. Dies gelingt mithilfe der (nach  $v$  aufgelösten) Quantenbedingung aus der Aufgabenstellung:

$$v = \frac{n \cdot h}{m_e \cdot 2\pi r_n}$$

Einsetzen führt auf

$$r_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \cdot \left( \frac{m_e \cdot 2\pi r_n}{n \cdot h} \right)^2 = \frac{e^2 \cdot \pi \cdot m_e \cdot r_n^2}{\epsilon_0 \cdot n^2 \cdot h^2} \Rightarrow r_n = \frac{\epsilon_0 \cdot h^2}{e^2 \cdot \pi \cdot m_e} \cdot n^2$$

Grundzustand mit  $n = 1$  („bohrscher Radius“):

$$r_1 = \frac{\epsilon_0 \cdot h^2}{e^2 \cdot \pi \cdot m_e} = \frac{8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}}{\text{Vm}} \cdot (6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js})^2}{(1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2 \cdot 3,142 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} \approx 52,93 \text{ pm}$$

### Teilaufgabe 3

Ein erster Hinweis auf unterschiedliche Energiezustände ...

**HINWEIS** Dieser weniger bekannte Versuch zeigt drei von der Elektronenenergie abhängige Erscheinungen. Sie müssen hier vor allem den Zusammenhang zwischen Lichtfarbe und Energie berücksichtigen, wie er in der Quantenphysik erklärt wird.

### Lösungsschritte

- |    |   |
|----|---|
| 1. | Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).                            |
| 2. | Beschreiben Sie zunächst die Bahn des Elektrons und wie sich die Bewegungsenergie des Elektrons ändert. |
| 3. | Erklären Sie dann die jeweils stattfindende Wechselwirkung mit den Argonatomen.                         |

### Stichpunktlösung

Die Elektronen folgen im Gehrke-Seeliger-Versuch im Prinzip einer Wurfparabel, wobei ihre kinetische Energie bis zum Scheitelpunkt kontinuierlich ab- und danach wieder zunimmt. Im obersten Bereich ist die kinetische Energie so gering, dass sie nicht ausreicht, um ein Argonatom durch Stoß in einen höheren Energiezustand zu versetzen (genauer gesagt: in einen Zustand, dessen Energie so groß ist, dass das bei der Rückkehr in den Grundzustand emittierte Photon im sichtbaren Spektralbereich wäre). Im mittleren Bereich zeigt das rötliche Leuchten, dass hier eine Stoßanregung möglich ist. Die rote Farbe entspricht einer Wellenlänge von ca. 650 nm, dies entspricht einer geringeren Photonenenergie als das blaue Leuchten (Wellenlänge ca. 400 nm) im unteren Bereich der Parabel. Dort wird demnach ein Argonzustand mit höherer Energie angeregt, was dort aufgrund der größeren kinetischen Energie der Elektronen möglich ist.

## Teilaufgabe 4

Ein klassisches Experiment ...

**HINWEIS** Der Franck-Hertz-Versuch ist einer der wichtigsten Versuche zur Begründung der Quantentheorie. Es lohnt sich auf jeden Fall, ihn bei der Abiturvorbereitung gründlich zu wiederholen.

### Lösungsschritte

1. Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).
2. Erklären Sie die Vorgänge in der Röhre vor allem in Hinblick auf das in der Abbildung dargestellte  $I_A$ - $U_B$ -Diagramm. An welcher Stelle tritt die Quantenphysik auf den Plan?
3. Sie benötigen zum Schluss den Zusammenhang zwischen Energie, Frequenz und Wellenlänge der Strahlungsquanten.
4. Achten Sie beim Berechnen von Zahlenwerten auf korrekte Einheiten.

### Stichpunktlösung

a)

Die Heizspannung  $U_H$  dient lediglich dazu, die Kathode durch ohmsche Verluste so zu erwärmen, dass Elektronen in die gasgefüllte Röhre austreten (*das müssen Sie nicht unbedingt angeben, es macht die Sache aber übersichtlicher*). Diese Elektronen werden von der regelbaren Beschleunigungsspannung  $U_B$  zunächst in Richtung des Gitters beschleunigt. Wenn ihre Energie am Gitter groß genug ist, um die zwischen Gitter und Anode anliegende Gegenspannung  $U_G$  zu überwinden, erreichen sie die Anode und es wird ein Anodenstrom  $I_A$  gemessen. Ist die Energie der Elektronen am Gitter dagegen zu klein, misst man keinen Anodenstrom.

b)

- Die Maxima des Anodenstroms liegen etwa bei 19 V, 37 V und 57 V.
- Solange  $U_B < U_G$  ist, fließt kein Anodenstrom. Wenn dieser erst ab  $U_B = 10$  V auftritt, muss dies der Wert der Gitterspannung sein.
- Aus dem Energiestufendiagramm lässt sich ablesen, dass ein Elektron in den beiden ersten angeregten Zuständen eines Neonatoms die Energien  $E_1 = 16,6$  eV bzw.  $E_2 = 18,5$  eV hat. Wenn ein beschleunigtes Elektron gerade diese Energie besitzt, kann es sie an das Neonatom abgeben denn nach dem bohrschen Atommodell können die Elektronen im Neon-Atom nur dann von einem Niveau in ein anderes wechseln, wenn sie die passende Energiedifferenz aufnehmen. Deswegen nimmt der Anodenstrom ab wenn  $U_B$  einen Wert hat von etwa 18 V hat.  
*Anmerkung: Die Anregung in das Niveau  $E_1$  ist aus quantentheoretischen Gründen sehr unwahrscheinlich, deswegen sinkt der Strom nicht schon bei  $U_B = 16,5$  V ab. Dies muss aber nicht in der Lösung angegeben werden.*

- Ab ca. 37 V sinkt  $I_A$  erneut ab, weil dann die Energie für zwei Stoßanregungen ausreicht, ab etwa 56 V können drei Neonatome in einen höheren Energiezustand gestoßen werden.

**c)**

Der Übergang  $E_1 \rightarrow E_2$  entspricht der Energiedifferenz  $\Delta E = 1,9 \text{ eV}$ . Nach der Formel  $E = hf$  entspricht dies einer Frequenz  $f = 4,59 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$  bzw. einer Wellenlänge von  $c/f = 653 \text{ nm}$  ( $c$ : Lichtgeschwindigkeit). Dieser Wert liegt im roten Bereich des sichtbaren Spektrums. Die beiden Übergänge in den bzw. aus dem Grundzustand sind mit Energiedifferenzen von 16,6 eV bzw. 18,5 eV um eine Größenordnung energiereicher und liegen damit bereits im Ultraviolett.



## PRÜFUNGSAUFGABEN HT 3

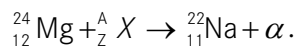
### Aufgabe: Radioaktivität von Natrium-22

Natrium-22 ( $^{22}\text{Na}$ ) ist ein radioaktives Isotop des Elements Natrium, das auf künstlichem Wege erzeugt werden kann und hauptsächlich im medizinischen Bereich eingesetzt wird.

#### Teilaufgabe 1: Die Herstellung des Isotops $^{22}\text{Na}$

Zur Herstellung des Isotops  $^{22}_{11}\text{Na}$  beschießt man  $^{24}_{12}\text{Mg}$  mit bestimmten in einem Beschleuniger zuvor beschleunigten Teilchen. Bei dem ablaufenden Umwandlungsprozess stellt man fest, dass Alpha-Teilchen (das sind  $^4_2\text{He}$ -Kerne) freigesetzt werden.

Bestimmen Sie das unbekannte Nuklid  $^A_Z X$  in der zugehörigen Kernumwandlungsgleichung



(6 Punkte)

#### Teilaufgabe 2: Der Zerfall des $^{22}\text{Na}$

Abbildung 1 zeigt das Energiestufenschema (Termschema) des radioaktiven Isotops  $^{22}\text{Na}$ . Das Zerfallsprodukt des  $^{22}\text{Na}$  ist das stabile Neon-Isotop  $^{22}\text{Ne}$ .

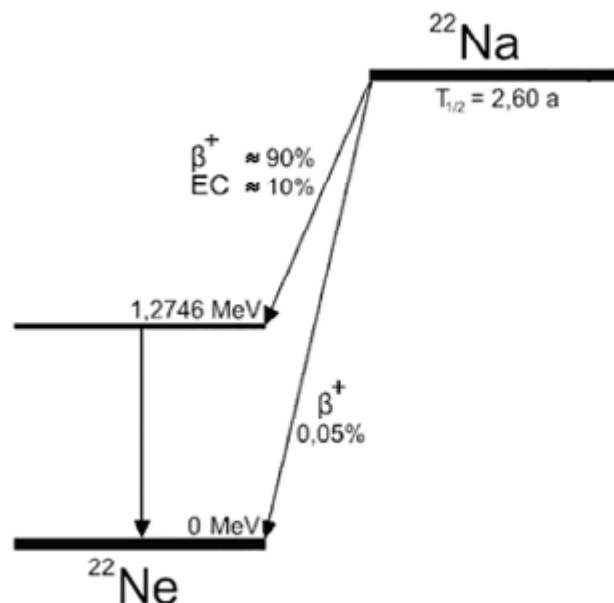


Abbildung 1: Energiestufenschema des Natrium-22  
(Hinweis: EC: electron capture (Elektroneneinfang), siehe Teilaufgabe 6)

- a) Beschreiben Sie den Zerfall des  $^{22}\text{Na}$  mit Hilfe des angegebenen Energiestufenschemas.
- b) Wie in Abbildung 1 zu sehen, tritt beim  $\beta^+$ -Zerfall des  $^{22}\text{Na}$  in  $^{22}\text{Ne}$  ein Positron  $e^+$  auf. Geben Sie an, welche Umwandlung im Kern des  $^{22}\text{Na}$  beim Aussenden des Positrons stattfindet.
- c) Stellen Sie die Kernumwandlungsgleichung für den  $\beta^+$ -Zerfall des  $^{22}\text{Na}$  in sein stabiles Folgeprodukt  $^{22}\text{Ne}$  auf.

(13 Punkte)

### Teilaufgabe 3: Energiebetrachtungen für den Zerfall des $^{22}\text{Na}$

Der Kern des  $^{22}\text{Na}$  hat die relative Kernmasse  $m_{\text{Na}} = 21,9884 \text{ u}$ , der Kern des Folgeprodukts  $^{22}\text{Ne}$  hat die relative Kernmasse  $m_{\text{Ne}} = 21,9859 \text{ u}$ ; dabei ist  $u$  die atomare Masseneinheit mit dem Wert  $u = 1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ .

- a) Berechnen Sie die durch den Massendefekt frei werdende Energie  $\Delta E$  in der Einheit MeV.  
[Zur Kontrolle:  $\Delta E \approx 2,3 \text{ MeV}$ ]
- b) In Abbildung 1 kann man erkennen, dass der Kern des Folgeprodukts  $^{22}\text{Ne}$  praktisch ausnahmslos zunächst im angeregten Zustand vorliegt und unter Aussendung eines Gamma-Quants mit der Energie von  $E_\gamma = 1,275 \text{ MeV}$  in seinen Grundzustand übergeht.
- Berechnen Sie in diesem Fall die für das Positron zur Verfügung stehende maximale kinetische Energie  $\Delta E_{\text{kin max}}$ .  
[Zur Kontrolle:  $E_{\text{kin max}} \approx 0,5 \text{ MeV}$ ]
- c) Bei sehr genauen Messungen zeigt sich, dass der in Teilaufgabe b) angesprochene maximale Wert der kinetischen Energie  $\Delta E_{\text{kin max}}$  des Positrons nicht ganz erreicht wird. Geben Sie einen möglichen Grund für diese Tatsache an.
- d) Die Geschwindigkeit  $v_{\text{max}}$  der Positronen mit maximal möglicher kinetischer Energie muss

berechnet werden gemäß der Gleichung 
$$v_{\text{max}} = \sqrt{1 - \left( \frac{m_0 \cdot c^2}{E_{\text{kin max}} + m_0 \cdot c^2} \right)^2} \cdot c.$$

- Berechnen Sie  $v_{\text{max}}$ .  
[Zur Kontrolle:  $v_{\text{max}} \approx 2,6 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ]
- Berechnen Sie (mittels der klassischen Gleichung für die kinetische Energie  $E_{\text{kin max}} = \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot v_{\text{max klassisch}}^2$ ) die Geschwindigkeit  $v_{\text{max klassisch}}$  der Positronen mit maximal möglicher kinetischer Energie.

- Vergleichen Sie das Ergebnis für  $v_{\max}$  klassisch mit dem für  $v_{\max}$  unter Einbeziehung der Lichtgeschwindigkeit,  $c = 3,00 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

(19 Punkte)

#### Teilaufgabe 4: Das Positron des $^{22}\text{Na}$

Das vom  $^{22}\text{Na}$  ausgesandte Positron wird ähnlich wie die Elektronen aus einem  $\beta^-$ -Zerfall in Materie zunächst abgebremst. Erst wenn es praktisch ganz abgebremst wurde, zerstrahlt (annihiliert) es mit einem in seiner Umgebung vorkommenden Elektron.

- a) Berechnen Sie anhand der Massen von Positron und Elektron ( $m_e^- = m_e^+ = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ) die Gesamtenergie der beiden bei der Annihilation entstehenden Gamma-Quanten in der Einheit MeV.
- b) Begründen Sie, warum bei der Annihilation von Positron und Elektron nicht ein einzelnes Gamma-Quant entstehen kann.
- c) Abbildung 2 zeigt das Gamma-Spektrum des  $^{22}\text{Na}$ .

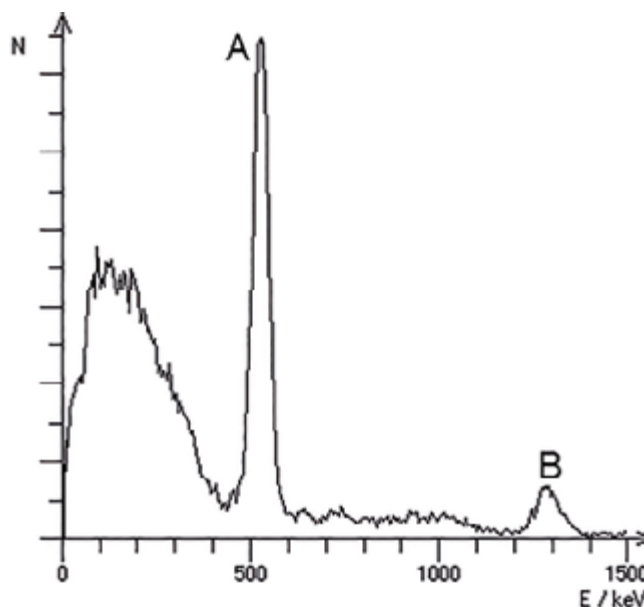


Abbildung 2: Gamma-Spektrum des Natrium-22

Geben Sie anhand des Diagramms die zu den beiden Peaks bei A und B gehörenden Energien  $E_{\gamma A}$  und  $E_{\gamma B}$  an und erläutern Sie deren Ursache.

(11 Punkte)

### Teilaufgabe 5: „Positronium“

In Laboren gelingt es, dass vor der Zerstrahlung das Positron zusammen mit einem Elektron einen dem Wasserstoffatom stark ähnelnden kurzlebigen Zustand bildet, das sogenannte Positronium.

- a) Für die möglichen Energieniveaus des Elektrons in einem Wasserstoffatom gilt

$$E_n = -13,6 \text{ eV} \cdot \frac{1}{n^2} \quad (\text{mit } n = 1, 2, 3 \dots).$$

Wenn man das Massenverhältnis von Elektron ( $m_{e^-} = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ) und Proton ( $m_p = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ) berücksichtigt, lautet die Gleichung genauer  $E_n = -13,6 \text{ eV} \cdot \left( \frac{m_p}{m_p + m_e} \right) \cdot \frac{1}{n^2}.$

Diskutieren Sie den Einfluss des ergänzten Faktors  $\left( \frac{m_p}{m_p + m_e} \right)$  hinsichtlich der Werte für die Energieniveaus des Elektrons in einem Wasserstoffatom.

- b) Im Positronium haben die beiden beteiligten Teilchen  $e^+$  und  $e^-$  die gleiche Masse:

$$m_{e^-} = m_{e^+}.$$

Der in Teilaufgabe a) für das Wasserstoffatom angegebene Korrekturterm lautet

also für das Positronium:  $\left( \frac{m_{e^+}}{m_{e^+} + m_{e^-}} \right)$  bzw.  $\left( \frac{m_{e^-}}{m_{e^+} + m_{e^-}} \right).$

Vergleichen Sie die sich ergebenden Energieniveaus für das Positronium mit denen für das Wasserstoffatom.

(8 Punkte)

### Teilaufgabe 6: Umwandlung des $^{22}\text{Na}$ durch Elektroneneinfang

Man beobachtet den Prozess, dass der Kern eines  $^{22}\text{Na}$ -Atoms ein Elektron vornehmlich aus einer inneren Schale (häufig aus der innersten Schale) seiner Hülle „einfängt“. Beim Elektroneneinfang (electron capture, vgl. Abbildung 1) entsteht zunächst der gleiche angeregte Kern wie der, der sich durch Aussendung eines Positrons ergibt, d. h., dieser Kern geht durch Aussendung von  $\gamma$ -Strahlung mit  $E_\gamma = 1,2746 \text{ MeV}$  in seinen Grundzustand über.

Neben dieser  $\gamma$ -Strahlung beobachtet man beim Einfang zusätzlich Röntgenstrahlung im Energiebereich von wenigen keV.

- a) ■ Beschreiben Sie den Vorgang beim Einfang eines Hüllen-Elektrons im Atomkern des  $^{22}\text{Na}$ -Atoms.  
■ Geben Sie die vollständige Umwandlungsgleichung für die daran beteiligten Teilchen an.
- b) ■ Beschreiben Sie die den Einfang eines Hüllen-Elektrons im Atomkern begleitenden Vorgänge in der Atomhülle.  
■ Erläutern Sie, auf welche Weise hierbei Röntgenstrahlung entsteht.

**(8 Punkte)**

## LÖSUNGEN HT 3

### Teilaufgabe 1

Zur Herstellung des Isotops ...

**HINWEIS** Dies ist eine einfache Abzählaufgabe, Sie müssen aber die Notation von Kernreaktionen beherrschen und wissen, was ein  $\alpha$ -Teilchen ist.

### Lösungsschritte

1. Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).
2. Bilanzieren Sie die Reaktionsgleichung einmal nach der Massenzahl und einmal nach der Protonenzahl, um die A- und Z-Werte des gesuchten Kerns zu bekommen.

### Stichpunktlösung

Ein  $\alpha$ -Teilchen ist ein Helium-4-Kern, hat also je zwei Neutronen und Protonen. Auf der rechten Seite der Gleichung stehen somit  $22 + 4 = 26$  Nukleonen, also zwei mehr, als der Mg-Kern enthält. Weiterhin stehen rechts  $11 + 2 = 13$  Neutronen, eins mehr als im Mg-Kern. Damit ist der gesuchte Kern X ein Deuteron bzw. Deuteriumkern:  ${}^4_2X = {}^2_1D \equiv {}^2_1H$ .

### Teilaufgabe 2

Abbildung 1 zeigt das Energiestufenschema ...

**HINWEIS** Nun geht es um Kernreaktionen und ihre Darstellung im Termschema. Sie müssen die Informationen in der Grafik erfassen und in Ihren Worten wiedergeben sowie als Kernreaktionsgleichung darstellen können.

### Lösungsschritte

1. Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).
2. Beschreiben Sie die verschiedenen Zerfallsmöglichkeiten des  ${}^{22}\text{Na}$ -Kerns, die in der Abbildung dargestellt sind.
3. Beachten Sie, dass es sich nicht um einen „herkömmlichen“ Betazerfall, d. h. nicht um einen  $\beta^-$ -Zerfall handelt.

## Stichpunktlösung

a)

Das Schema gibt zunächst an, dass die Halbwertszeit von  $^{22}\text{Na}$  2,6 Jahre beträgt. Es werden die folgenden drei Zerfallskanäle (mögliche Zerfallswege) angegeben:

- $\beta^+$ -Zerfall (Aussendung eines Positrons) in einen metastabilen angeregten  $^{22}\text{Ne}$ -Kern, dessen Energie um 1,2746 MeV über dem Grundzustand liegt, Wahrscheinlichkeit ca. 90 %,
- EC (Elektroneneinfang, electron capture), d. h. Einfangen eines inneren Elektrons durch den Atomkern, wiederum in den angeregten  $^{22}\text{Ne}$ -Kernzustand, Wahrscheinlichkeit ca. 10 %,
- direkter  $\beta^+$ -Zerfall in den Grundzustand des  $^{22}\text{Ne}$ -Kerns, Wahrscheinlichkeit ca. 0,05 %.

b)

Beim  $\beta^+$ -Zerfall wandelt sich ein Proton unter Aussendung eines Positrons und eines Elektron-Neutrinos in ein Neutron um (*es wird nicht erwartet, dass auch das Neutrino genannt wird, die Reaktion würde aber ohne Neutrino nicht stattfinden*).

c)

Kernreaktionsgleichung:



## Teilaufgabe 3

Der Kern des  $^{22}\text{Na}$  hat die relative Kernmasse ...

**HINWEIS** Die ersten beiden Fragen sind im Wesentlichen Rechenaufgaben. In c) und d) dagegen sind physikalische Interpretationen gefragt. Sie müssen dazu wissen, was beim Betazerfall im Einzelnen geschieht, und außerdem mit Grundzügen der Relativitätstheorie vertraut sein.

## Lösungsschritte

1. Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).
2. Achten Sie darauf, dass Sie die Naturkonstanten mit den richtigen Zahlenwerten, Zehnerpotenzen und Einheiten schreiben.
3. Sie sollten außerdem eine jeweils sinnvolle Zahl von Nachkommastellen angeben.
4. In c) gibt es mehrere mögliche Antworten, es genügt, wenn Sie eine angeben und begründen.

### Stichpunkt看ung

a)

Der Massendefekt beträgt  $\Delta m = 21,9884 \text{ u} - 21,9859 \text{ u}$ . Dies entspricht nach der einsteinschen Formel  $E = mc^2$  der Energiedifferenz

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = 0,0025 \cdot 1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot (2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 \approx 3,7311 \cdot 10^{-13} \text{ J} \approx 2,3291 \text{ MeV}$$

b)

Bei der Rechnung ist zu beachten, dass der Massendefekt nicht vollständig in kinetische Energie umgewandelt wird, sondern ein Teil davon benötigt wird, um die der Ruhemasse des Positrons entsprechende Energie bereitzustellen. Diese Energie ist gleich der Ruheenergie des Elektrons und beträgt 511 keV.

$$E_{\text{kin, max}} = 2,329 \text{ MeV} - 1,275 \text{ MeV} - 0,511 \text{ MeV} = 0,543 \text{ MeV}$$

c)

Beim „normalen“  $\beta^-$ -Zerfall wie auch beim  $\beta^+$ -Zerfall entsteht auch ein (Anti-)Neutrino. Dessen Ruhemasse ist zwar extrem klein, es erhält jedoch auch kinetische Energie, die in der bisherigen Betrachtung nicht berücksichtigt wurde.

Außerdem erfährt der aussendende Kern aus Gründen der Impulserhaltung einen kleinen Rückstoß; die damit verbundene Energie muss ebenfalls bei einer genaueren Berechnung berücksichtigt werden.

d)

$$\blacksquare v_{\text{max}} = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{0,511 \text{ MeV}}{0,511 \text{ MeV} + 0,543 \text{ MeV}} \right)^2} \approx 2,622 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 87,5 \% \cdot c$$

■ Klassische Rechnung:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin, max}} &= \frac{m_0}{2} v_{\text{max}}^2 \Rightarrow v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2E_{\text{kin, max}}}{m_0}} = c \cdot \sqrt{\frac{2E_{\text{kin, max}}}{m_0 c^2}} \\ &= 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 0,543 \text{ MeV}}{0,511 \text{ MeV}}} \approx 4,37 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 145,8 \% \cdot c \end{aligned}$$

- Die Rechnung mit dem aus der klassischen Mechanik bekannten Ausdruck für die kinetische Energie führt auf einen Wert, der deutlich größer ist als die Lichtgeschwindigkeit, was der Speziellen Relativitätstheorie widerspricht und auch experimentell noch niemals beobachtet wurde. Der davor berechnete Wert ist zwar auch sehr hoch, aber kleiner als die Lichtgeschwindigkeit und angesichts der großen beteiligten Energien und der geringen Masse der Positronen durchaus realistisch.



## Teilaufgabe 4

Das vom  $^{22}\text{Na}$  ausgesandte Positron ...

**HINWEIS** Thema dieser Aufgabe sind die Annihilation von Positron und Elektron und die dabei auftretenden Energien.

### Lösungsschritte

1. Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).
2. Erklären Sie die Gamma-Energien mit der Umwandlung von (Ruhe-)Masse in Energie sowie der Energieerhaltung.
3. Die zweite Frage beantworten Sie mit der Impulserhaltung.
4. Zum Schluss messen Sie die Peak-Energien von A und B aus und geben eine plausible Vermutung ab, welchen bisher (nicht nur in dieser Teilaufgabe!) diskutierten Energien diese Werte entsprechen dürften.
5. Achten Sie beim Berechnen von Zahlenwerten auf korrekte Einheiten.

### Stichpunktlösung

a)

Da nach Aufgabenstellung das Positron weitgehend abgebremst ist und das Elektron eine vergleichbar niedrige Geschwindigkeit haben muss, um mit dem Positron mit nennenswerter Wahrscheinlichkeit reagieren zu können, kann man davon ausgehen, dass die Energie der beiden entstehenden Gamma-Quanten zusammen gerade der Ruhemasse bzw. -energie von Elektron und Positron entspricht:

$$E_{\gamma, \text{gesamt}} = (m_{e^+} + m_{e^-}) \cdot c^2 \approx 2 \cdot 511 \text{ keV} = 1,022 \text{ MeV}$$

b)

Wie bei a) schon angedeutet, haben Elektron und Positron unmittelbar vor der Annihilation einen verschwindenden Gesamtimpuls. Wegen der Impulserhaltung muss dann der Gesamtimpuls der Zerfallsprodukte ebenfalls verschwinden. Dies ist nur möglich, wenn mindestens zwei Gamma-Quanten entstehen, denn ein einzelnes Gamma-Quant kann niemals den Impuls 0 haben (es bewegt sich ja immer und in jedem Bezugssystem mit Lichtgeschwindigkeit).

c)

Der linke Peak A liegt ganz offenbar bei der Elektronen-Ruheenergie von 511 keV, der rechte (B) liegt etwa bei 1,3 MeV.

Der linke Peak rührt von den bei der Annihilation frei werdenden Gamma-Quanten, die jedes die Hälfte der zur Verfügung stehenden 1,022 MeV davontragen.

Der rechte Peak entspricht recht genau den 1,275 MeV, die freigesetzt werden, wenn der angeregte  $^{22}\text{Ne}$ -Kern aus Teilaufgabe 3.2a) in seinen Grundzustand übergeht.

## Teilaufgabe 5

In Laboren gelingt es ...

**HINWEIS** Noch eine kleine Rechenaufgabe. Wichtig ist der Transfer, dass dieselbe Modellvorstellung bis zu einem gewissen Grad für unterschiedliche Kombinationen von Elementarteilchen genutzt werden kann.

## Lösungsschritte

1. Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal). Dies gilt hier noch mehr als sonst, weil Sie die durchzuführenden Gleichungen bereits geliefert bekommen.

## Stichpunktlösung

a)

Da ein Proton 1836-mal so viel Masse hat wie ein Elektron, beträgt der Korrekturfaktor

$\frac{1}{1 + \frac{1}{1836}} = 99,95 \%$ , ist also praktisch gleich 1 und kann in der Regel vernachlässigt werden.

b)

Im Positronium beträgt der Korrekturfaktor dagegen  $\frac{m_e}{m_e + m_e} = \frac{1}{2}$  und ist nicht zu vernachlässigen, vielmehr hat das Elektron im Positronium halb so große Energiewerte wie im Wasserstoffatom.

*Anmerkung: Da im Positronium beide Komponenten die gleiche Masse haben, gibt es jetzt nicht mehr einen „ortsfesten“ Kern und ein „kreisendes“ Elektron, sondern zwei um den gemeinsamen Schwerpunkt laufende Partikel. Ein korrektes Bild der Vorgänge kann man nur mithilfe der Quantentheorie gewinnen.*

## Teilaufgabe 6

Man beobachtet den Prozess ...

**HINWEIS** Der Elektroneneinfang ist eine der selteneren Kernreaktionen, die nicht überall im Unterricht behandelt werden. Man kann sich aber die wesentlichen Vorgänge auch aus dem quantenphysikalischen Atommodell herleiten.

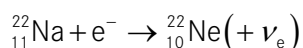
### Lösungsschritte

1. Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).
2. Beschreiben Sie den Elektroneneinfang einmal „aus Sicht“ des Atomkerns und einmal in Hinblick auf die Vorgänge in der Elektronenhülle (wo kommt das gefangene Elektron her, was passiert dort, wenn es weg ist?).
3. Vergleichen Sie ggf. das Geschehen auch mit dem, was beim  $\beta^+$ -Zerfall passiert.

### Stichpunktlösung

a)

- Der Elektroneneinfang ist sehr ähnlich zum  $\beta^+$ -Zerfall: Diesmal wird jedoch nicht ein Positron vom Proton emittiert, sondern ein „Anti-Positron“, also ein Elektron, vom Proton absorbiert. Auch dabei wandelt sich eines der Protonen in ein Neutron um.  
(Die Nennung des emittierten Neutrinos wird wiederum nicht erwartet, es ist aber physikalisch unbedingt notwendig.)
- Die Kernreaktionsgleichung lautet jetzt:



b)

Der Elektroneneinfang hinterlässt eine Lücke in einer der inneren Elektronenschalen, die normalerweise von einem äußeren Elektron aufgefüllt wird, welches ein entsprechend hochenergetisches Strahlungsquant abgibt, genauer gesagt ein Röntgenphoton.

Wenn das nachrückende Elektron nicht aus der äußersten Schale kommt (kein Valenzelektron ist), hinterlässt es selbst eine Lücke, die von einem noch weiter außen sitzenden Elektron aufgefüllt wird, sodass sich eine ganze Kaskade von immer niederenergetischeren Strahlungsquanten ergibt.

## PRÜFUNGSAUFGABEN HT 4

### Aufgabe: Oberflächen- und Kristallanalyse mit Materiewellen

#### Teilaufgabe 1: Debye-Scherrer-Verfahren

Materiewellen wurden 1924 postuliert und kurze Zeit später mit Versuchen wie dem Debye-Scherrer-Verfahren nachgewiesen.

In einer Vakuumröhre treffen Elektronen, die aus einem Glühdraht (Heizspannung  $U_H$ ) ausgetreten sind und durch die Spannung  $U_B$  beschleunigt werden, auf eine dünne, polykristalline Graphitfolie (siehe Abbildung 1). Dahinter werden sie auf einem Leuchtschirm sichtbar gemacht. Typischerweise beobachtet man um einen hellen Mittelpunkt konzentrische, helle Kreisringe (siehe Abbildung 2).

Bei der hier verwendeten Elektronenbeugungsröhre beträgt der Abstand zwischen der Graphitfolie und dem kreisförmigen Leuchtschirm  $\ell = 13,3 \text{ cm}$ .

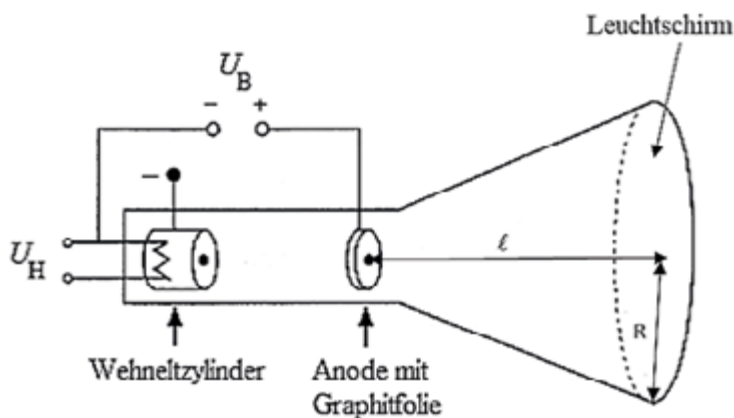


Abbildung 1: Skizze der Vakuumröhre

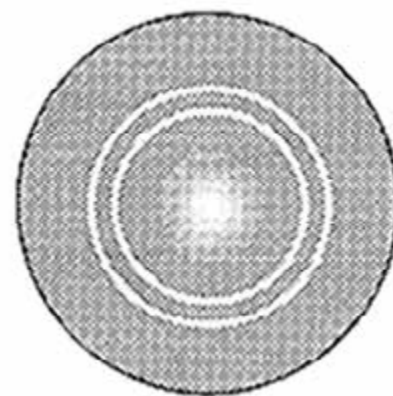


Abbildung 2: Bild auf dem Leuchtschirm

- a) Betrachten Sie zunächst das Auftreffen der Elektronen auf einen Einkristall.

Leiten Sie anhand einer geeigneten Skizze die Bragg-Gleichung her

$$m \cdot \lambda = 2 \cdot d \cdot \sin(\vartheta_m) \text{ mit } m = 1; 2; 3; \dots,$$

also den Zusammenhang zwischen der Wellenlänge  $\lambda$  der auftreffenden Welle und ihren möglichen Glanzwinkeln  $\vartheta_m$  bei der Beugung an einem Einkristall mit Netzebenenabstand  $d$ .

(6 Punkte)

- b) Beim oben dargestellten Debye-Scherrer-Verfahren trifft der Elektronenstrahl nicht auf einen Einkristall, sondern auf ein Pulver aus Graphitkristallen, eine sogenannte polykristalline Probe (siehe Abbildung 3).

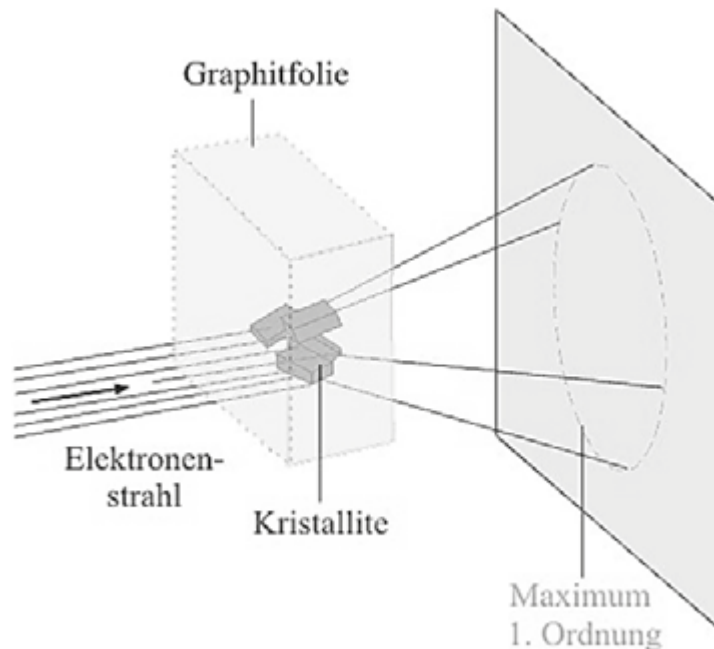


Abbildung 3  
(Quelle: Joachim Hertz Stiftung/www.leifiphysik.de)

*Erläutern Sie, wie es zur Ausbildung von Ringen am Beobachtungsschirm kommt.*

**(4 Punkte)**

- c) Zwischen der De-Broglie-Wellenlänge  $\lambda$ , dem Netzebenenabstand  $d$  in einem Kristallit, dem Radius  $r$  eines Interferenzringes und dem Abstand  $\ell$  der Kristallite vom Leuchtschirm besteht die folgende Beziehung für die Maxima 1. Ordnung (siehe Abbildung 4):

$$\frac{r}{\ell} = \frac{\lambda}{d}$$

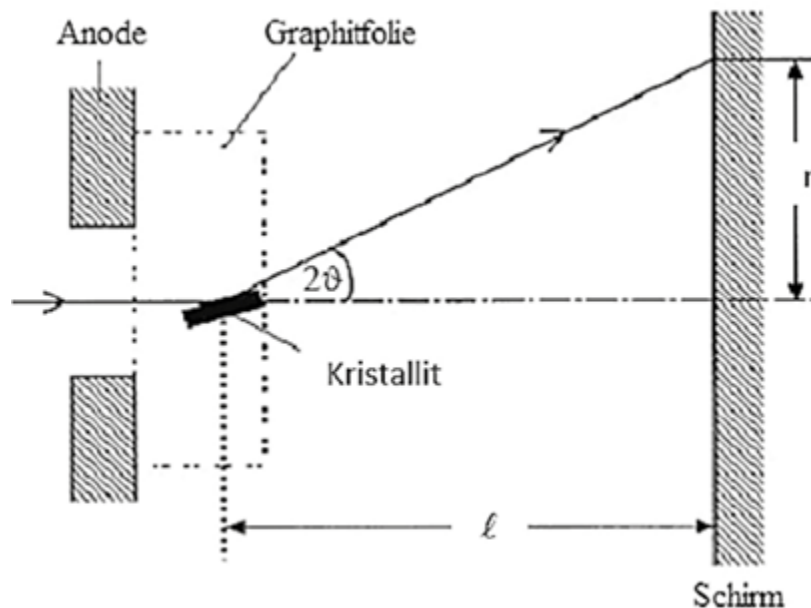


Abbildung 4: Skizze zur Veranschaulichung der Größen

- Begründen Sie diese Beziehung mit Hilfe der Bragg-Gleichung und der Geometrie der Anordnung.

Für den Radius des näherungsweise als eben angenommenen Leuchtschirms gilt  $R = 4,7\text{cm}$ .

- Bestimmen Sie den größten Ablenkswinkel  $2 \cdot \vartheta_{\text{max}}$ , der mit dieser Elektronenröhre theoretisch noch beobachtet werden kann.

(7 Punkte)

- d) Der Graphitkristall hat zwei verschiedene Netzebenenabstände:  $d_1 = 2,13 \cdot 10^{-10}\text{ m}$  und  $d_2 = 1,23 \cdot 10^{-10}\text{ m}$ . Bei den beiden Kreisringen im Interferenzbild handelt es sich um die Maxima 1. Ordnung, die durch Reflexion an den Netzebenen im Abstand  $d_1$  bzw.  $d_2$  entstehen.

- Begründen Sie, dass die Beugung an den Netzebenen mit Abstand  $d_1 = 2,13 \cdot 10^{-10}\text{ m}$  zur Ausbildung des inneren Interferenzringes führt.
- Zeigen Sie für den Fall kleiner Beschleunigungsspannungen (in nicht-relativistischer Rechnung), dass für den Zusammenhang zwischen der Beschleunigungsspannung  $U_B$  und der De-Broglie-Wellenlänge  $\lambda$  gilt:

$$U_B = \frac{h^2}{2 \cdot e \cdot m_e \cdot \lambda^2}$$

- Bestimmen Sie die kleinstmögliche Beschleunigungsspannung  $U_B$ , ab der erstmalig ein Interferenzkreis auf dem Leuchtschirm zu erwarten ist.

(17 Punkte)

- e) Für unterschiedliche Beschleunigungsspannungen werden unterschiedliche Radien der Beugungsringe gemessen.

- Zeigen Sie allgemein, dass zwischen der Beschleunigungsspannung  $U_B$  und dem Radius  $r$  folgender Zusammenhang besteht:

$$r \sim \frac{1}{\sqrt{U_B}}$$

Die folgende Tabelle gibt die Messwerte für den innersten Beugungsring mit Radius  $r_1$  an:

$U_B$ in kV	3,0	3,5	4,0	4,5
$r_1$ in mm	14,5	13,0	12,0	11,5

Tabelle: Radius des Beugungsringes in Abhängigkeit von der Beschleunigungsspannung

- Überprüfen Sie, ob die Messwerte in der Tabelle diese Proportionalität recht gut wiedergeben.

**(7 Punkte)**

- f) Geben Sie eine experimentelle Möglichkeit an, um nachzuweisen, dass das Beugungsbild tatsächlich durch Elektronen und nicht von Röntgenstrahlung, die beim Auftreffen der Elektronen auf das Pulver entstanden sein könnte, erzeugt wurde.

**(3 Punkte)**

## Teilaufgabe 2: LEED-Verfahren

Beim LEED-Verfahren (Low Energy Electron Diffraction) werden Elektronen mit Beschleunigungsspannungen  $U_B$  von 50 V bis 200 V beschleunigt und senkrecht zur Oberfläche auf die Probe geschossen (siehe Abbildung 5). Man kann näherungsweise davon ausgehen, dass die Elektronen nicht in den Kristall eindringen und nur von den einzelnen Oberflächenatomen der kristallinen Probe und nicht von den Netzebenen des Einkristalls reflektiert werden. Die reflektierten Elektronen erzeugen auf dem Leuchtschirm ein Bild scharf begrenzter Flecken, das Schirmbild wird anschließend ausgewertet. Abbildung 6 zeigt ein Beispiel eines solchen Schirmbildes.

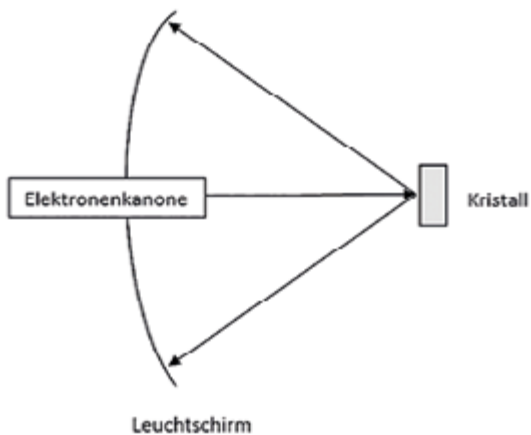


Abbildung 5:  
 Schematischer Aufbau einer LEED-Apparatur



Abbildung 6:

Schirmbild einer Kristalloberfläche

(Bild aus: [http://www.uni-leipzig.de/~xray/download/study/netzoa4\\_5\\_ped\\_leed\\_sims\\_f1\\_19.pdf](http://www.uni-leipzig.de/~xray/download/study/netzoa4_5_ped_leed_sims_f1_19.pdf))

- a) *Erläutern Sie, warum das Schirmbild nicht mit der Teilchenvorstellung von Elektronen erklärbar ist.*

**(3 Punkte)**

- b) Die Atome der Kristalloberfläche bilden ein Gitter. Wenn man nur eine Reihe der Atome betrachtet, erhält man ein eindimensionales Gitter. In einem Gedankenexperiment soll ein solches eindimensionales Gitter mit dem Atomabstand  $b$  mit Elektronen beschossen werden (siehe Abbildung 7).

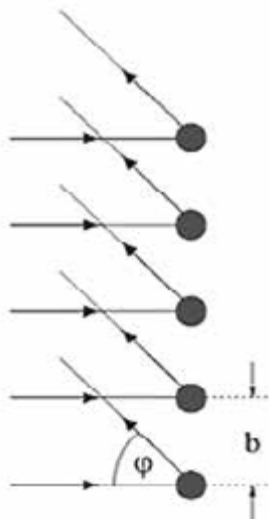


Abbildung 7: Bild eines eindimensionalen Atomgitters  
 (Quelle: Joachim Hertz Stiftung / [www.leifiphysik.de](http://www.leifiphysik.de))



Begründen Sie, dass helle Schirmpunkte nur unter den Winkeln  $\varphi_n$  zur Einfallsrichtung auftreten, für die gilt:

$$\sin(\varphi_n) = \frac{n \cdot \lambda}{b} \text{ mit } n = 1; 2; 3; \dots$$

**(5 Punkte)**

- c) In dem Gedankenexperiment bilden die hellen Punkte auf dem Leuchtschirm ebenfalls ein eindimensionales Gitter. Nehmen Sie im Folgenden näherungsweise an, dass die Schirmpunkte unter einem kleinen Winkel  $\varphi$  (Kleinwinkelnäherung) erscheinen und es sich um einen ebenen Schirm handelt, der sich im Abstand  $L$  von dem eindimensionalen Atomgitter befindet.

Bestimmen Sie eine Gleichung, die den Zusammenhang zwischen der Gitterkonstanten  $b$  des eindimensionalen Atomgitters und der Gitterkonstanten  $k$  des Gitters auf dem Schirm beschreibt.

**(6 Punkte)**

- d) Zur Bestimmung der Gitterkonstanten eines Nickelkristalls werden Elektronen der kinetischen Energie  $E_{\text{kin}} = 200\text{eV}$  verwendet. Das Maximum 1. Ordnung wird unter einem Winkel von  $\varphi_1 = 25^\circ$  beobachtet.

Bestimmen Sie die Gitterkonstante des Nickelkristalls.

**(6 Punkte)**

## LÖSUNGEN HT 4

### Teilaufgabe 1

Materiewellen wurden 1924 postuliert ...

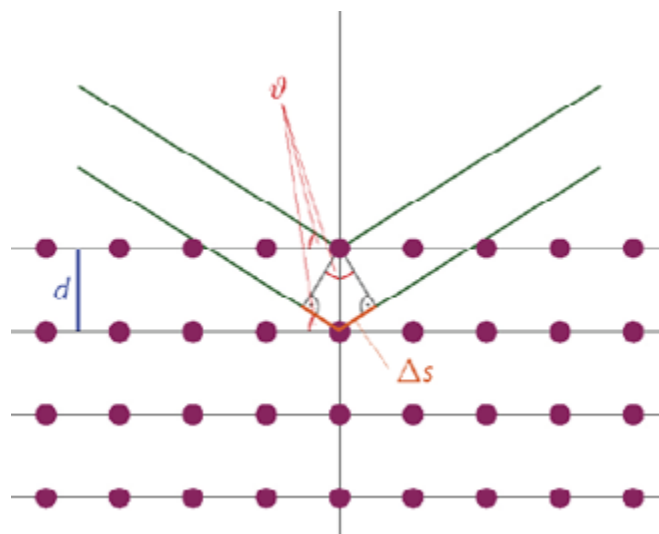
**HINWEIS** In dieser Aufgabe geht es um Grundwissen zur Kristallstrukturanalyse mit Elektronenstrahlen anstelle von Röntgenstrahlung.

### Lösungsschritte

1. Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).
2. Fertigen Sie die Skizze zur Bragg-Gleichung sorgfältig an, damit Sie keine Faktoren übersehen bzw. Winkel und Strecken verwechseln.
3. Kombinieren Sie Ihr Wissen über Elektronenstrahlen mit dem über die Beugung hochenergetischer Strahlung an Kristallebenen.
4. Die Überprüfung auf Linearität der Daten in Teilaufgabe d) führen Sie am besten mit einem selbst gezeichneten oder geplotteten Diagramm durch. Sie können aber auch mit den Werten in der (von Ihnen ergänzten) Tabelle selbst argumentieren.

### Stichpunktllösung

a)



In der Zeichnung ist der Gangunterschied zwischen dem an der obersten Atomlage und dem an der zweitobersten Atomlage reflektierten Strahl die „geknickte“ orangefarbene Strecke  $\Delta s$ . An den beiden spiegelsymmetrischen rechtwinkligen Dreiecken liest man die trigonometrische Beziehung

$$\sin \vartheta = \frac{\Delta s/2}{d}$$

ab. Damit die beiden reflektierten Strahlen konstruktiv interferieren, muss gelten:

$$\Delta s = m \cdot \lambda \Rightarrow \sin \vartheta_m = \frac{m \cdot \lambda}{2d} \Leftrightarrow 2d \sin \vartheta_m = m \cdot \lambda$$

**b)**

Bei der Kristallpulvermethode besteht die Probe nicht aus einem einheitlichen Kristall mit durchgängig parallelen Netzebenen, sondern aus sehr vielen kleinen, zufällig im Raum orientierten Kristallstückchen. Je nach deren Orientierung zeigt daher der bei einer gegebenen Wellenlänge konstruktiv interferierende reflektierte Strahl 1. Ordnung an eine andere Position auf dem in der Versuchsskizze dargestellten Kreis. Zusammen ergeben die unzähligen verschiedenen möglichen Kristall-Orientierungen dann einen kontinuierlichen Kreis auf dem Schirm.

**c)**

- Aus Abbildung 4 in der Aufgabenstellung ersieht man die Beziehung  $\tan 2\vartheta = \frac{r}{\ell}$ . Mit der Kleinwinkelnäherung wird daraus

$$\frac{r}{\ell} = \tan 2\vartheta \approx 2 \sin \vartheta$$

Die Bragg-Gleichung mit  $m = 1$  lautet aber gerade

$$2 \sin \vartheta = \frac{\lambda}{d},$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

- Gesucht ist jetzt  $2\vartheta_{\max}$  für den Fall  $r = R = 4,7 \text{ cm}$ :

$$2\vartheta_{\max} = \arctan \frac{R}{\ell} = \arctan \frac{4,7 \text{ cm}}{13,3 \text{ cm}} \approx 19,46^\circ$$

**d)**

- Da der Radius  $r$  des Interferenzrings und der Netzebenenabstand  $d_k$  ( $k = 1; 2$ ) zueinander umgekehrt proportional sind (und  $\ell$  und  $\lambda$  konstant sind), muss der kleinere Netzebenenabstand zum größeren Ring gehören.
- Der Energiegewinn aufgrund der Beschleunigungsspannung entspricht der kinetischen Energie der Elektronen; in nichtrelativistischer Näherung gilt daher

$$e \cdot U_B = \frac{m_e v_e^2}{2} \Leftrightarrow v_e = \sqrt{\frac{2eU_B}{m_e}}.$$

Für den (nichtrelativistischen) Impuls haben wir dann

$$p_e = m_e \cdot v_e = \sqrt{2m_e e U_B} = \frac{h}{\lambda} \Leftrightarrow U_B = \frac{h^2}{2m_e e \lambda^2}$$

- Wie gerade gezeigt, ist die Beschleunigungsspannung am kleinsten, wenn  $\lambda$  am größten ist, also ist  $U_{B, \min} = U_B(\lambda_{\max})$ . Zu  $\lambda_{\max}$  gehört der Ablenkwinkel (im Maximum 1. Ordnung).  $\vartheta_{\max}$  und es gilt mit der Bragg-Gleichung  $2d \sin \vartheta_{\max} = \lambda_{\max}$ . Für  $d$  wählen wir den Netzebenenabstand  $d_1$ , da wir gerade gezeigt haben, dass dieser den weiter innen liegenden Ring erzeugt. Schließlich ist  $\vartheta_{\max}$  gerade die Hälfte des soeben ausgerechneten Winkels, unter dem der Schirm von der Blende aus gesehen erscheint, also  $19,46^\circ / 2 = 9,73^\circ$ . Insgesamt haben wir damit:

$$U_{B, \min} = \frac{h^2}{2m_e e \lambda_{\max}^2} = \frac{(6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js})^2}{2 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot (2 \cdot 2,13 \cdot 10^{-10} \text{ m} \cdot \sin 9,73^\circ)^2} \approx 290,2 \text{ V}$$

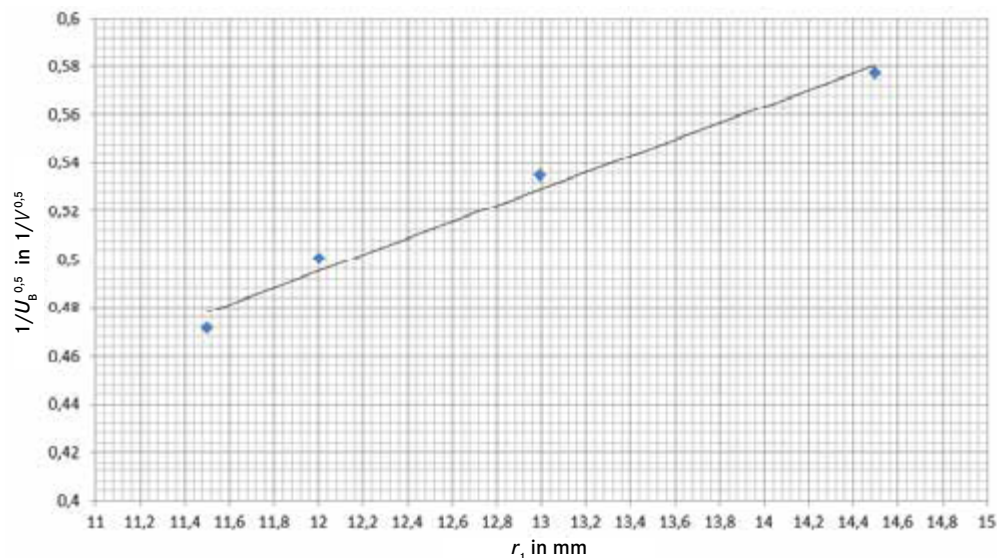
e)

- Verknüpft man die Formeln aus c) und d), erhält man

$$\lambda = \frac{ra}{\ell} \Rightarrow U_B = \frac{n^2}{2m_e e} \cdot \frac{\ell^2}{r^2 d^2} \Rightarrow r = \frac{n\ell}{d} \cdot \sqrt{\frac{1}{2m_e e}} \cdot \sqrt{\frac{1}{U_B}}$$

- Ergänzte Wertetabelle:

$U_B$ [V]	3	3,5	4	4,5
$r_1$ [mm]	14,5	13	12	11,5
$\frac{1}{\sqrt{U_B}}$ [ $V^{-0,5}$ ]	0,577	0,535	0,5	0,471



Das Diagramm zeigt recht geringe Abweichungen der aufgetragenen Messwerte von der Ausgleichsgerade. Ohne Angabe der Messfehler lässt sich allerdings nicht abschließend beurteilen, ob die Abweichungen (in der Mitte etwas darüber, außen etwas darunter) eine physikalische Ursache haben oder rein statistischer Natur sind.

f)

Da Elektronen eine elektrische Ladung haben, Röntgenquanten dagegen nicht, könnte man das Beugungsbild mit elektrischen und/oder magnetischen Feldern stören, wenn es sich tatsächlich um einen Elektronenstrahl handelte. Am einfachsten ginge das mit einem kleinen Dauermagneten.

## Teilaufgabe 2

Beim LEED-Verfahren ...

**HINWEIS** Diese Teilaufgabe ist eine direkte Fortsetzung der vorherigen; Sie müssen im Wesentlichen die Ergebnisse von Teilaufgabe 1 auf die neue Situation übertragen.

## Lösungsschritte

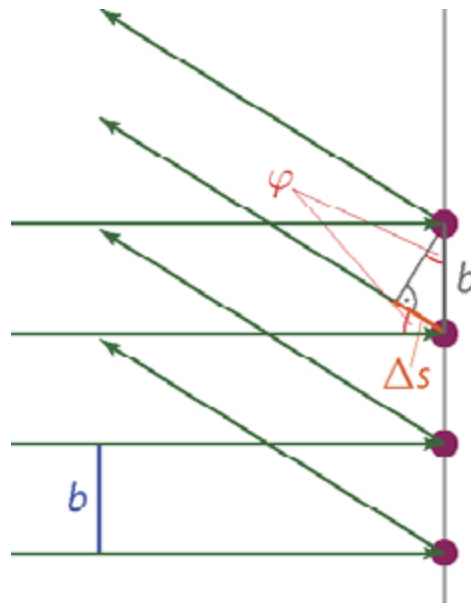
- |    |   |
|----|---|
| 1. | Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).  |
| 2. | Für die Winkelbedingung müssen Sie überlegen, was Sie aus der letzten Aufgabe (Bragg-Bedingung) übernehmen können und was nicht.  |
| 3. | Achten Sie beim Berechnen der Zahlenwerte auf korrekte Einheiten – insbesondere auch darauf, dass Sie nur SI-Einheiten verwenden. |

## Stichpunktlösung

a)

Die einzelnen Punkte auf dem Schirm deuten darauf hin, dass es bestimmte Vorzugswinkel gibt, bei denen durch konstruktive Interferenz die Intensität maximal wird. Interferenz gibt es aber nur bei Wellen.

b)



Die Argumentation verläuft fast genauso wie in Teilaufgabe 1.a). Diesmal liest man ab:

$$\sin \varphi = \frac{\Delta s}{b}$$

Konstruktive Interferenz tritt wiederum bei  $\Delta s = n \cdot \lambda$  auf und man erhält

$$\sin \varphi_n = \frac{n \cdot \lambda}{b}$$

c)

Analog zu Teilaufgabe 1.c) gilt hier

$$\tan \varphi_n = \frac{k_n}{L}$$

Mit der Kleinwinkelnäherung und dem erhaltenen Ausdruck für  $\sin \varphi_n$  ergibt dies

$$\frac{k_n}{L} \approx \sin \varphi_n = \frac{n \cdot \lambda}{b} \Leftrightarrow k_n = n \cdot \frac{\lambda \cdot L}{b}$$

Der Abstand zweier benachbarter Punkte auf dem Schirm beträgt dann

$$\Delta k_n = k_{n+1} - k_n = (n+1 - n) \cdot \frac{\lambda \cdot L}{b} = \frac{\lambda \cdot L}{b}$$

d)

Für die Gitterkonstante gilt nach b) (mit  $n = 1$ ):

$$b = \frac{\lambda}{\sin \varphi_1} = \frac{\lambda}{\sin 25^\circ}$$

Die Wellenlänge  $\lambda$  berechnen wir aus der kinetischen Energie bzw. der Beschleunigungsspannung analog zu Teilaufgabe 1.c):

$$\begin{aligned} U_B = \frac{h^2}{2m_e e \lambda^2} &\Leftrightarrow \lambda = h \cdot \sqrt{\frac{1}{2m_e e U_B}} = h \cdot \sqrt{\frac{1}{2m_e E_{\text{kin}}}} \\ &= 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 200 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}}} \approx 86,7 \text{ pm} \end{aligned}$$

Damit bekommen wir dann

$$b \approx \frac{86,7 \text{ pm}}{0,423} = 0,205 \text{ nm}$$

© Duden 2021

Bibliographisches Institut GmbH

Mecklenburgische Straße 53, 14197 Berlin

Das Wort **Duden** ist für den Verlag Bibliographisches Institut GmbH als Marke geschützt.

Kein Teil dieses Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Es gelten die allgemeinen Geschäftsbedingungen (AGB) der Website [www.duden.de](http://www.duden.de), die jederzeit unter dem entsprechenden Eintrag abgerufen werden können.

Alle Rechte vorbehalten. Diese Datei darf nur privat genutzt werden. Gewerbliche Nutzung, Verleih, Aufführung und unerlaubte Vervielfältigung sind untersagt.

Die Veröffentlichung der Originalprüfungen erfolgt mit freundlicher Genehmigung des zuständigen Kultusministeriums. Die Lösungsvorschläge liegen nicht in der Verantwortung des Kultusministeriums.

**Autor der Lösungsvorschläge:**

Dr. Matthias Delbrück